Davide Osenda

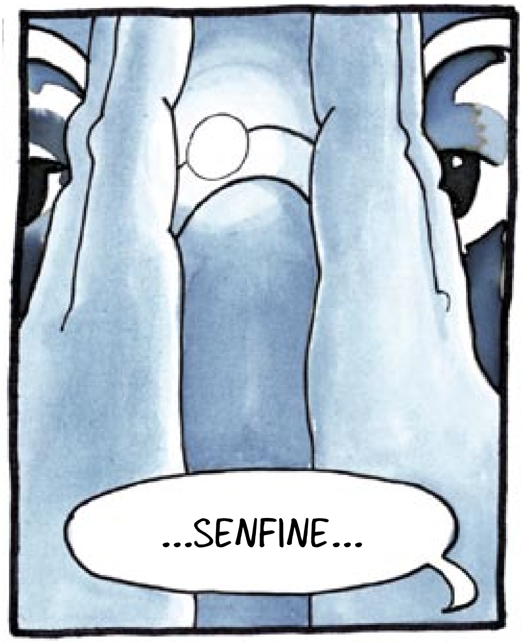
Lasta lekcio en Gotingeno

kun eseo de Davide Astori

projekto RoMEo

creative commons

esperanto



...HISTORIO DE PARADOKSAJ INTUICIOJ...

Ankaŭ ĉi-foje, Rat-Man entrudiĝis. Ne rekte, ja certe, sed estas kaŭze de li se vi nun havas enmane tiun ĉi "nefinitan rakonton": se la plej grava persono malantaŭ la mus-orela superheroo (mi parolas pri Andrea Plazzi, kiun mi dankas pro lia kontribuo al tiu ĉi eldonaĵo) ne estus malkovrinta, tuthazarde, la unuopan (ĝis nun) verkon de Davide Osenda, eble li ne estus parolinta pri tio en sia blogo, kaj mi eble ne konatiĝintus kun ĝi. Kun la unuopa verko, sed ankaŭ kun Davide.
Kiu estas vere bela persono. Kaj ne nur ĉar li faris desegnaĵon vere delican por dediĉi al mi la libreton kiun mi ĵus aĉetis de li, sed precipe ĉar la ĝentileco per kiu li pritraktas la temojn de tiu ĉi rakonto estas la sama ĝentileco laŭ kiu li movas la pentrilojn sur blanka papero, la sama ĝentileco laŭ kiu li parolas al vi eĉ se vi estas neniu kaj proponas al li traduki lian rakonton, kiun vi ŝatis, en lingvon pri kiu li aŭdis same kiel oni aŭdas pri multaj aliaj aferoj. Ĉar ĉiuj (krom mi, kompreneble) kapablas pentri akvarelojn, sed por uzi ilin por paroli pri senlimeco de nombroj kaj pri limeco de la homaj animo kaj agoj necesas esti vere lerta. Li estas tia, kaj li eĉ rajtus iomete sin glori pri tio, laŭ mi; sed tion li ne faras, kaj do mi eĉ pli ŝatas lin.
Nun lia rakonto troviĝas en la breto flanke de alia komiksverko kiu parolas pri senlima malĝojo kaj freneziĝo, tiu MAUS de Art Spiegelman kiu eble iam ankaŭ parolos Esperanton.
Nuntempe, tamen, ni ĝuu tiun ĉi rakonton, ĉar tio ne estas malmulto. Kaj ni estu dankemaj al Davide, kiu ĝin kreis kaj kiu nun per ĝi regalas nin, kiel oni regalas geamikojn per bona glaso da vino.

Feliĉan kaj instruan legadon!

Daniele Binaghi

Mi vidas, sed mi ne kredas

Davide Osenda, naskiĝinta en Cuneo, kie li vivas kaj laboras kiel informadikisto, estis nur amuziĝanto pri akvarelpentrado kaj ludado de basgitaro. Li legadis komiksojn kaj librojn pri scienca popularigo kaj, pro nesubpremebla emo al konfuzo, li decidis kunigi du el siaj pasioj: bildstriojn kaj matematikon. Por fari tion, li bezonis temon kaj spac-tempajn koordinatojn; la cetero, li pensis, estis pleonasma: matematiko kontentiĝus per la simpleco de reduktita ekvacio.

Tute kontraŭe al Georg Cantor, elstara matematikisto, patro de la moderna teorio de aroj kaj precipe de transfinitaj numeraloj, kies eltrovoj en ĉi studobjekto estis tiel revoluciaj kaj malproksimaj de komuna sento, ke li mem apenaŭ akceptis ilin: "Mi vidas, sed mi ne kredas" estis lia rimarko rilate la neeviteblan ekziston de hierarkio de infinitoj, la ascenda stuparo de Alef-oj, de tiam ligita al lia nomo.

Davide kaj liaj amataj akvareloj en Maroko

Tamen, Davide akceptis la defion: "komence de libro de Amir Aczel" (*The Mystery of the Aleph: Mathematics, the Kabbalah, and the Search of Infinity*). "mi envicigis proksimume kion mi konis pri nefini-esploroj: la teoriojn de Cantor kaj tiujn de Gödel, kiu aldonis gravan eltrovon, ktp, ktp". Jen la temo, unua elemento de la ekvacio; mankis nur la koordinatoj, la lokigo.

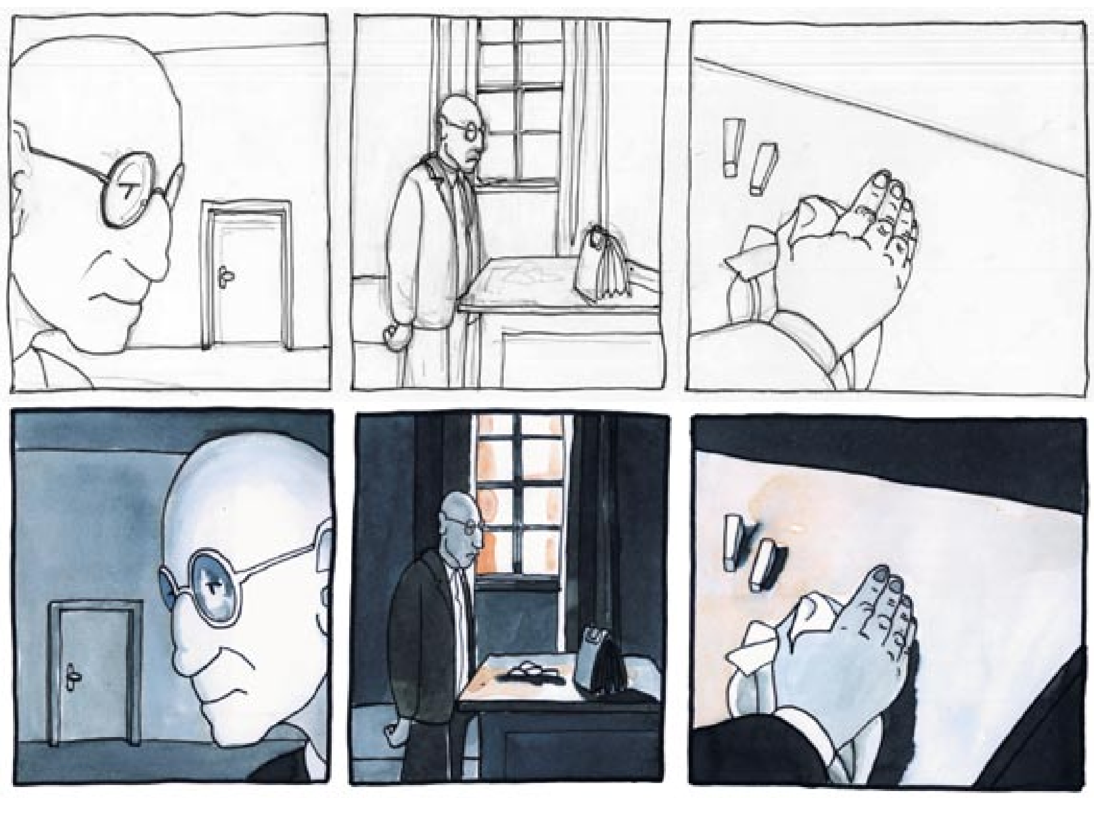
Je ĉi punkto eniras la kampon David Hilbert, unu el la lastaj kompletaj matematikistoj, eble la ununura nuntempulo komparebla kun Eulero kaj Gauss. Aŭtoro de fundamentaj kontribuaĵoj en ĉiuj kampoj, pri kiuj li okupiĝis, Hilbert pasigis grandan parton de sia vivo kaj kariero ĉe la jam prestiĝa universitato de Gotingeno, kiu sub lia gvidado fariĝis centro de absoluta eminenteco, unika en la matematik-historio. En 1934 la Kulturministro de la *Reich* demandis al David Hilbert, ĉu la germana matematiko suferis pro la elpelo de la judaj docentoj; li respondis: "Suferis? Ĝi ne suferis, Sinjoro Ministro. Simple, ĝi plu ne ekzistas". Ne plu dubinde: universitata lernoĉambro, kun siaj nigraj tabuloj, siaj kretoj, sia natura-nenatura silento, estis la plej taŭga lokigo; ankaŭ pri la epoko jam estis farita taŭga elekto.

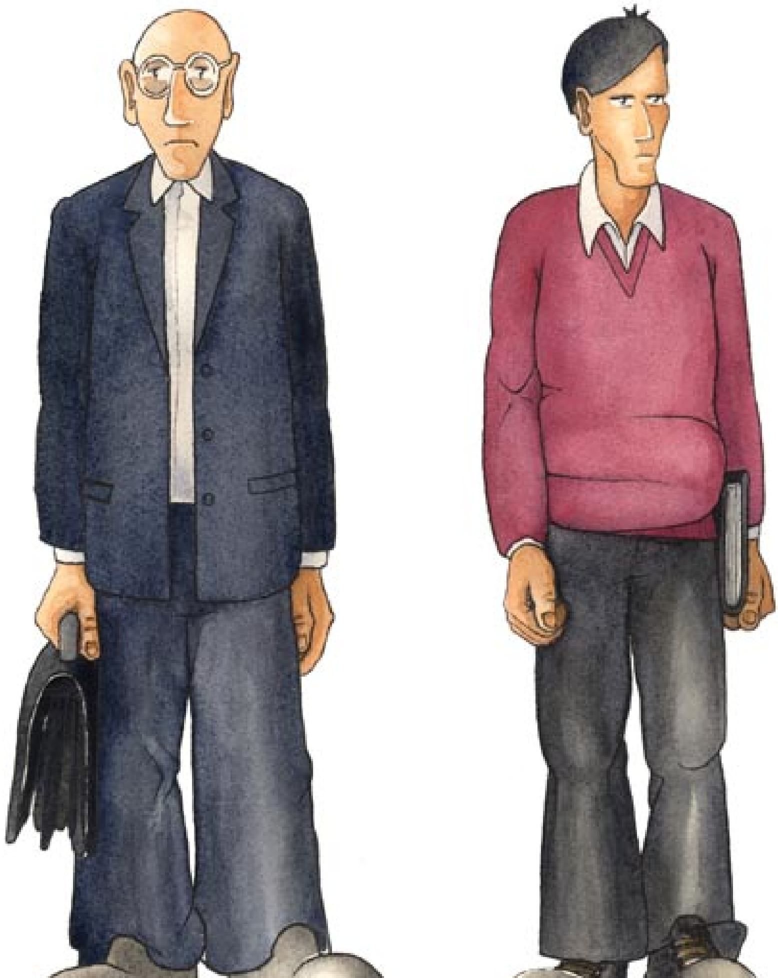
La rezulto de ĉi tiu ekvacio estas "Lasta lekcio en Gotingeno", rakonto pri la nefini-teorio de Cantor. Rakonto, kiu eniras ideojn fundamentajn ĉe dudekjarcentaj matematiko kaj filozofio, sen iĝi tede detala kiel lernolibro aŭ instrucela bildstrio. Subtile estas prezentata travivaĵo, historio interplektiĝanta kun la Historio. Rakonto, kiu, en la menso de Davide, estas pli ampleksa ol tiu, kiun ni ĉi tie prezentas, eĉ ol tiu jam publikigita en Italio (de la eldonejo 001 Edizioni, en 2009).

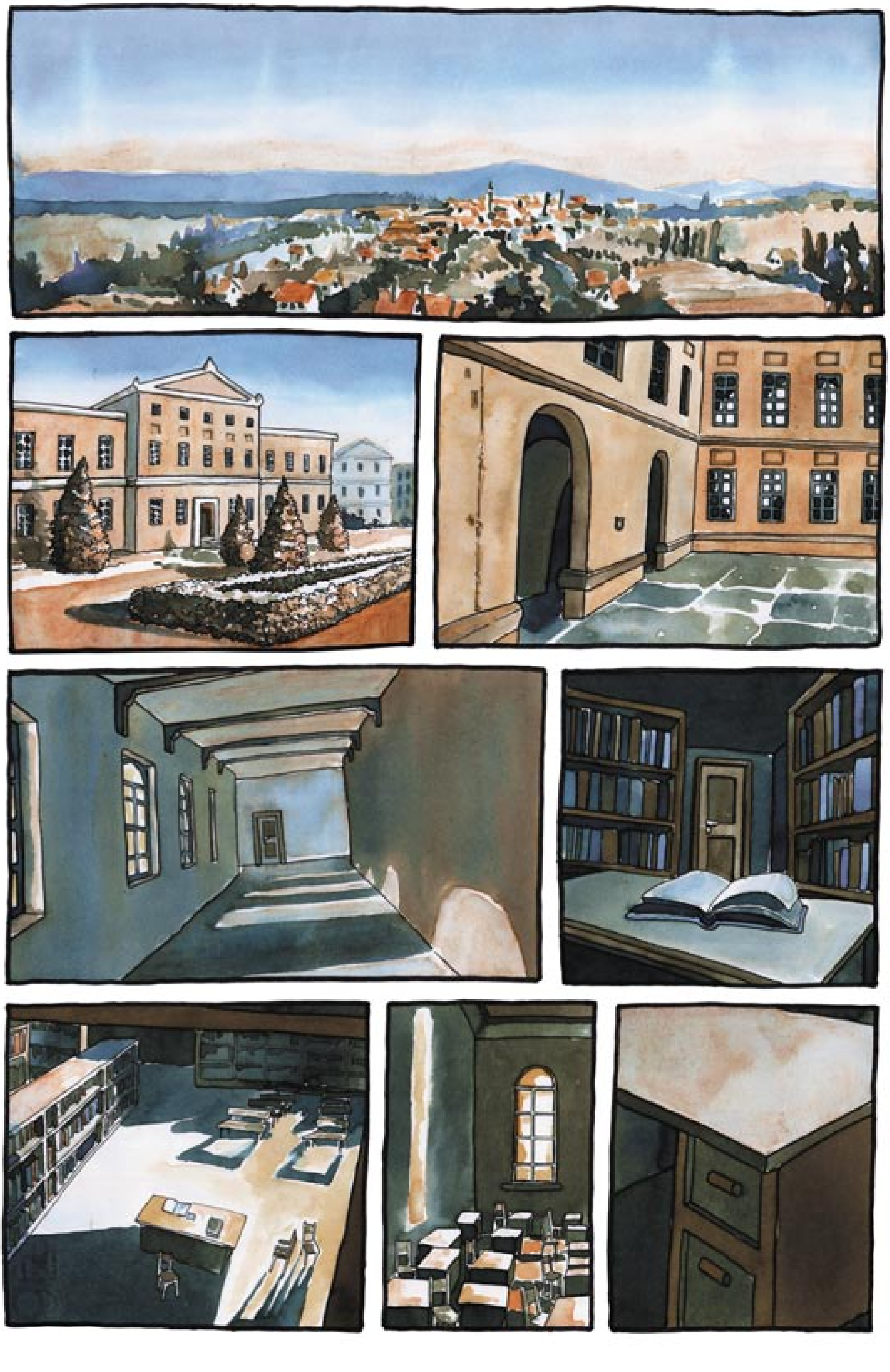
“En mia koruptita menso, (Gotingeno) devis esti la unua ĉapitro, la antaŭfakto de iom pli riĉa rakonto, kiu disvolviĝas nuntempe, pri la travivaĵoj de knabino, Rebeka. Ŝi, dum komplika periodo de sia adolesko, parolas konfidence kun sia avo Alkuin, la studento, kiu en Gotingeno renkontis profesoron Fiz en la senhoma lernoĉambro. Rakonto iom plata, certe ne aventura laŭ kutima gusto: eĉ, iom sentimenta. Travivaĵo bazita sur la rilato (inter la homoj kaj inter la konoj, mi opinias), kiu iĝas preteksto por reiri la gravan turnopunkton de nedetermino, kuntrenante gravulojn kiel Jung, Bateson, Heisenberg, Schrödinger. Historio de paradoksaj intuicioj: mi supozas, ke ĝia titolo povas esti “Animo”, sed ŝajnas al mi, ke, laŭ ĉi vojo, la dua ĉapitro aperos post dek jaroj!”

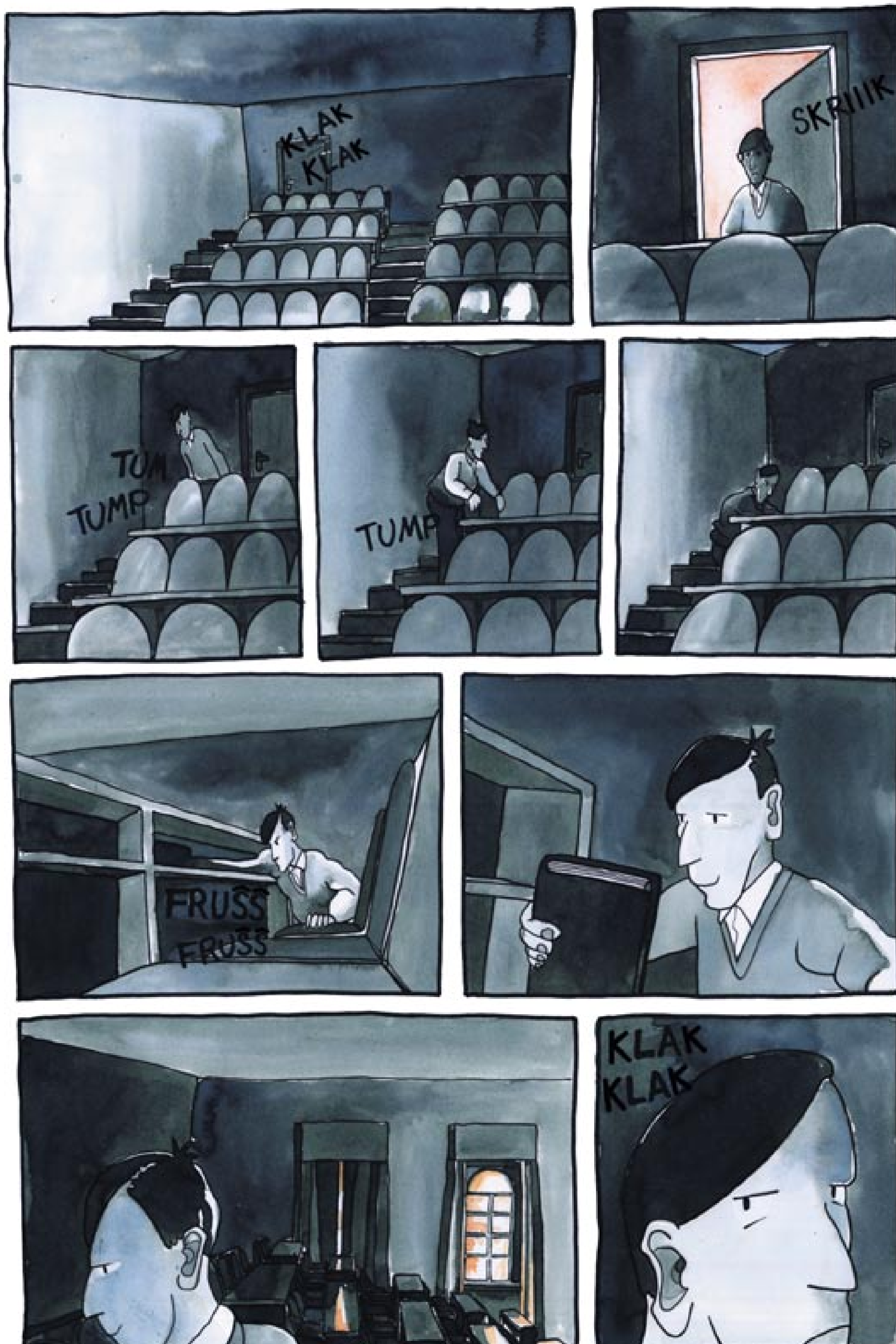
Ni vidos... la esploro de infinito neniam finas...

Daniele Binaghi





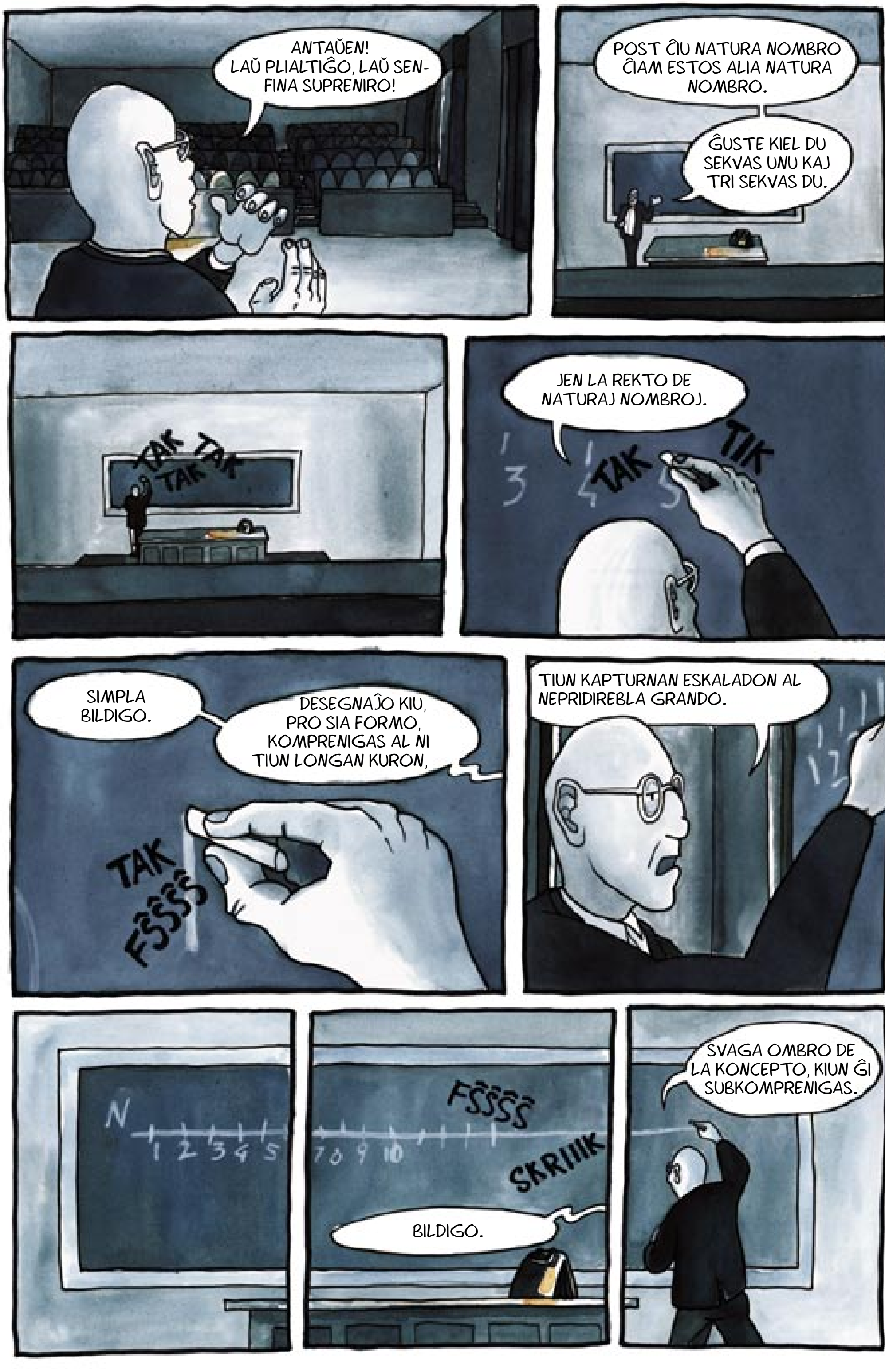


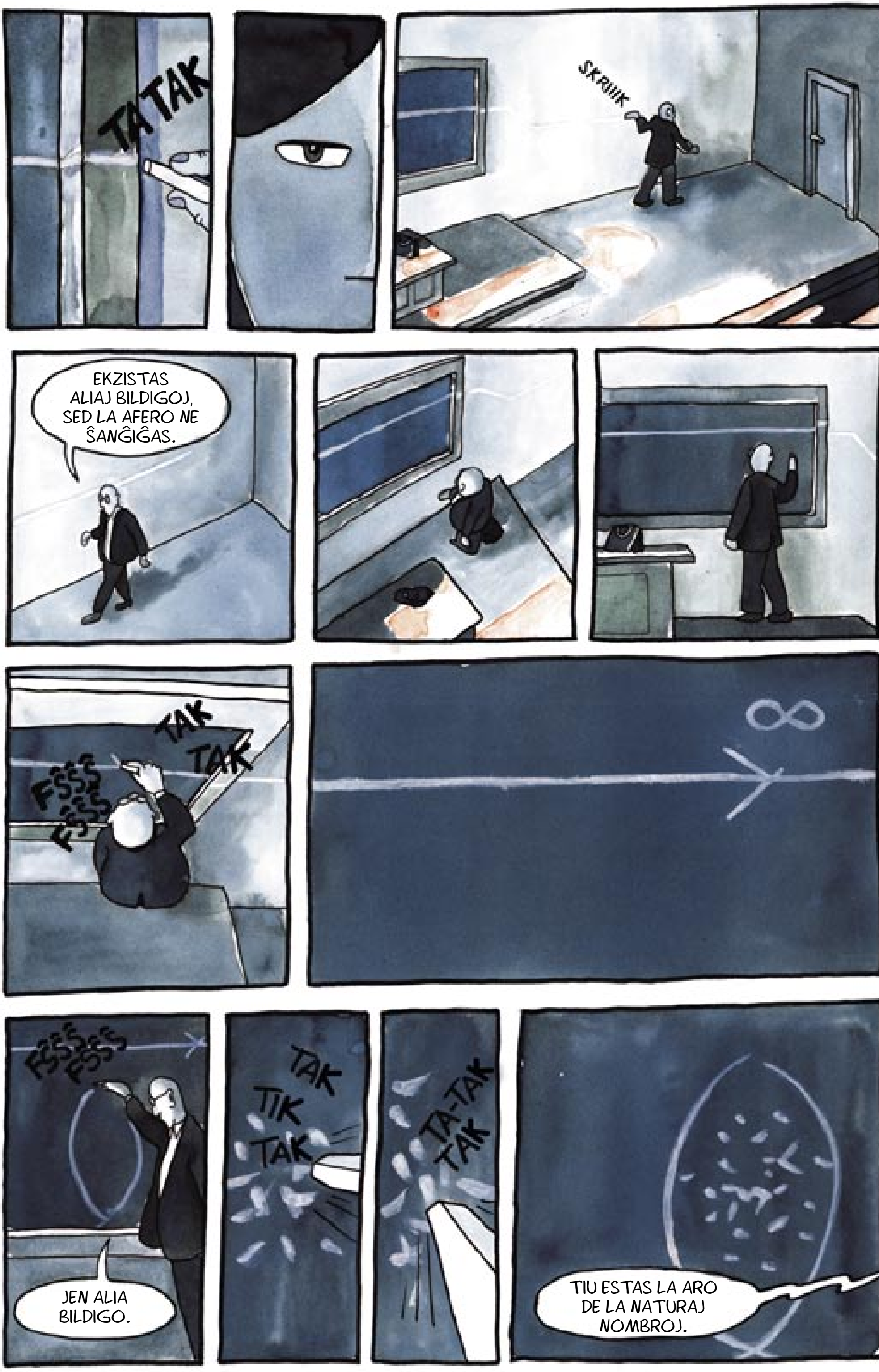

KLAK
KLAK
SKRIIIK
TUM
TUMP
TUMP
FRUSS
FRUSS
KLAK
KLAK

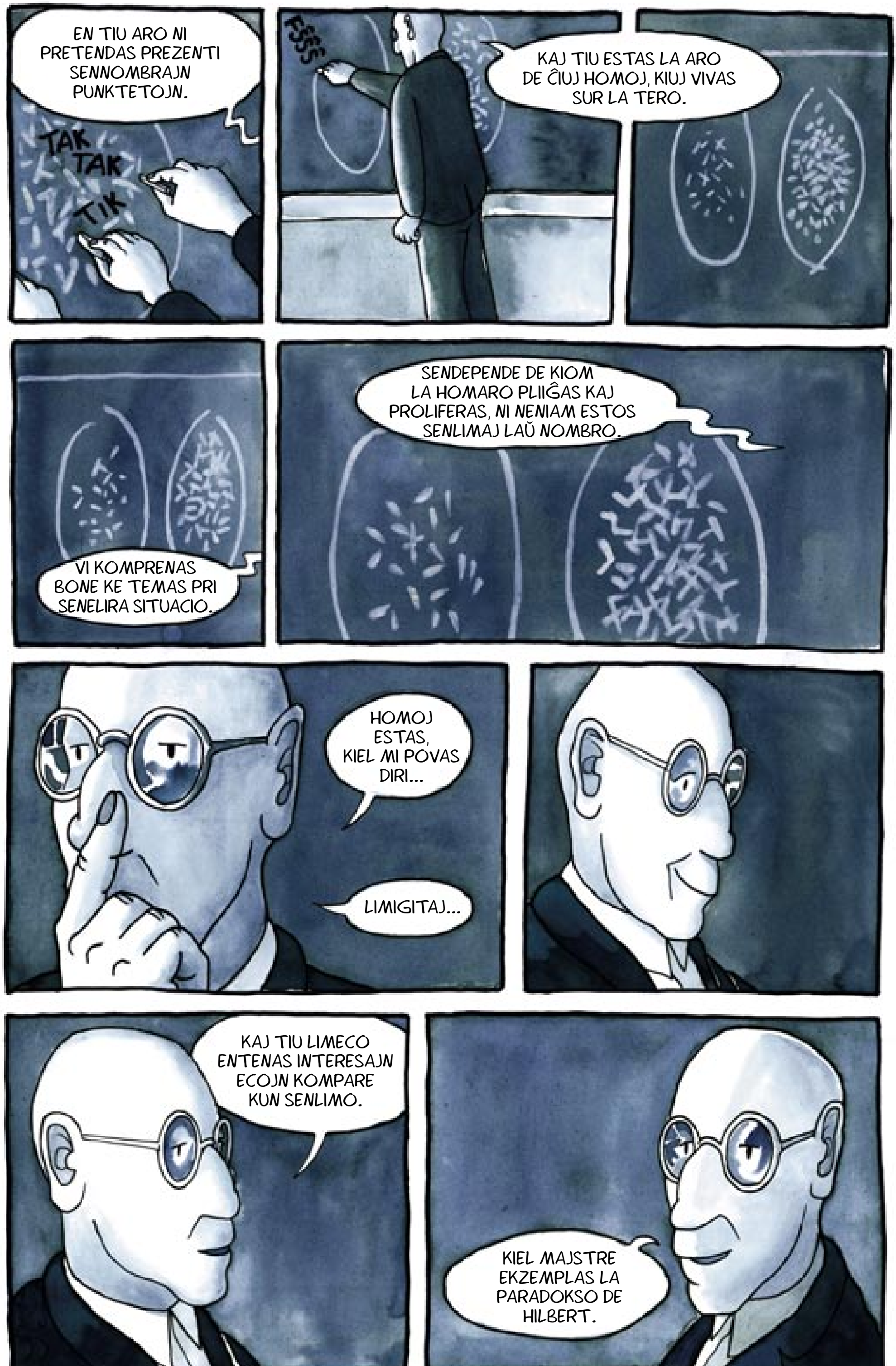
SKRIIIK
TAP
TAP
FRUSS
FRUSS
FRUSS

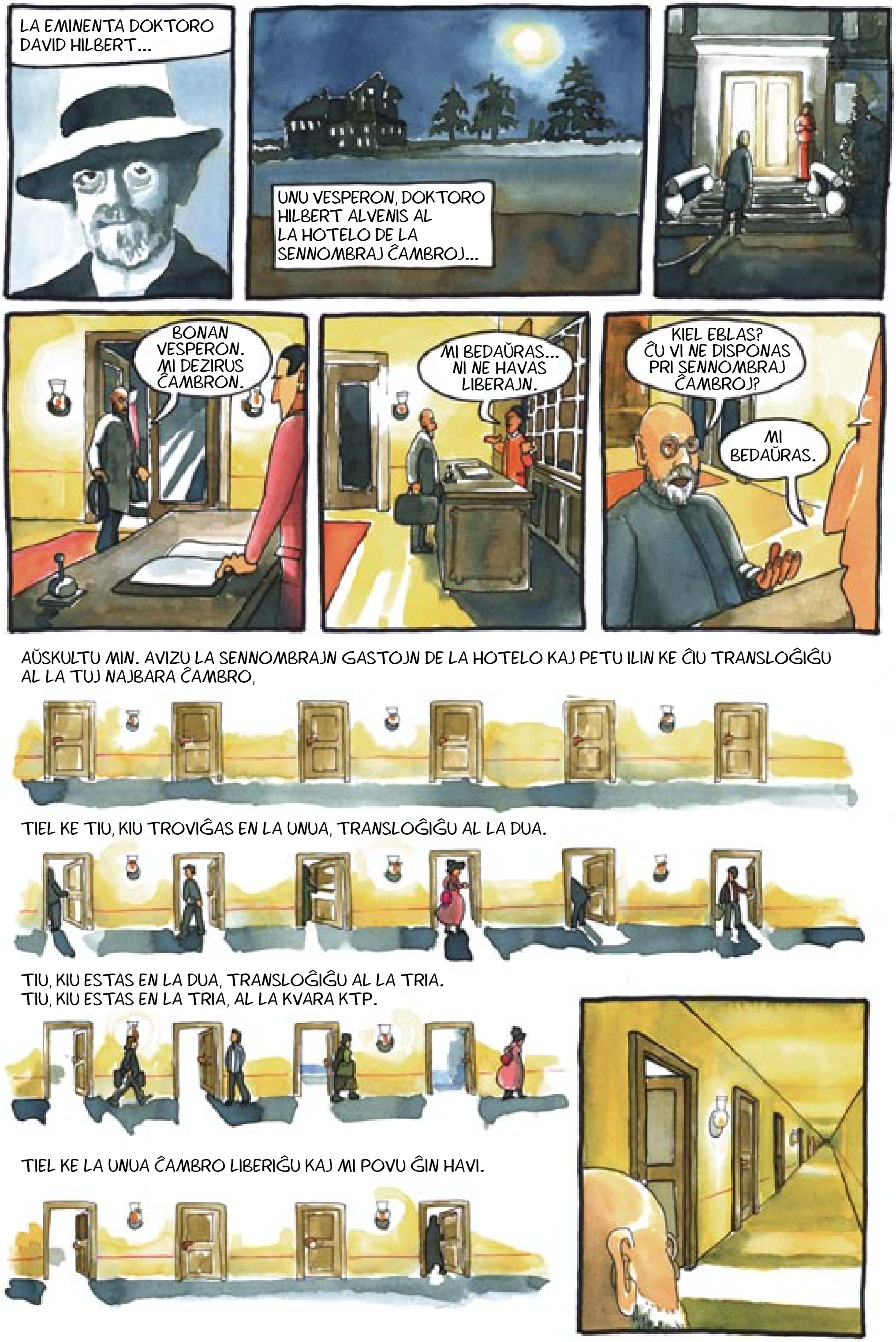
KUN IASPECA MALTRANKVILO MI ESTAS ĈI TIE, ĈI-VESPERE.
KAJ KUN BEDAŬRO.
ĈAR ĈI TIU ESTAS MIA LASTA LEKCIO EN GOTINGENO.
MI DO PERMESOS AL MI LONGAN BABILADON.
SPECON DE SENDETALA POPULARIGO, DUM KIU MI TUTE NE PARADOS PER TEKNIKISMOJ.
ĈAR HODIAŬ MI DEZIRAS ALIAN ALIRON: PLI SIMPLAN, EĈ SIMPLEMAN.
BABILADON PRI TEMO MALFACILA KAJ NEBULA.
SPECON DE PRETERFLUGO.
NI PAROLOS PRI NEFINIO.
KAJ KUN NEFINIO, PRI LA HIPOTEZO DE KONTINUO EN MATEMATIKO.

NI KOMENCU DE LA NOMBROJ...
DE NIA SPERTO PRI NOMBROJ...
PRI NATURAJ NOMBROJ, KIUJ, LAŬGRADE, SEKVAS UNU LA ALIAN...
KAJ PLIIĜAS...
KAJ LAŬ VALORO, KAJ LAŬ KVANTO.
UNU.
DU.
TRI.
KVAR.
KVIN.
DEK. DUDEK.
KAJ CENT, KAJ MIL, KAJ PLU!


ANTAŬEN! LAŬ PLIALTIĜO, LAŬ SEN-FINA SUPRENIRO!
POST ĈIU NATURA NOMBRO ĈIAM ESTOS ALIA NATURA NOMBRO.
ĜUSTE KIEL DU SEKVAS UNU KAJ TRI SEKVAS DU.
TAK TAK TAK
JEN LA REKTO DE NATURAJ NOMBROJ.
TAK TIK
SIMPLA BILDIGO.
DESEGNAĴO KIU, PRO SIA FORMO, KOMPRENIGAS AL NI TIUN LONGAN KURON,
TAK
FŜŜŜS
TIUN KAPTURNAN ESKALADON AL NEPRIDIREBLA GRANDO.
FŜŜŜS
SKRIIIK
BILDIGO.
SVAGA OMBRO DE LA KONCEPTO, KIUN ĜI SUBKOMPRENIGAS.

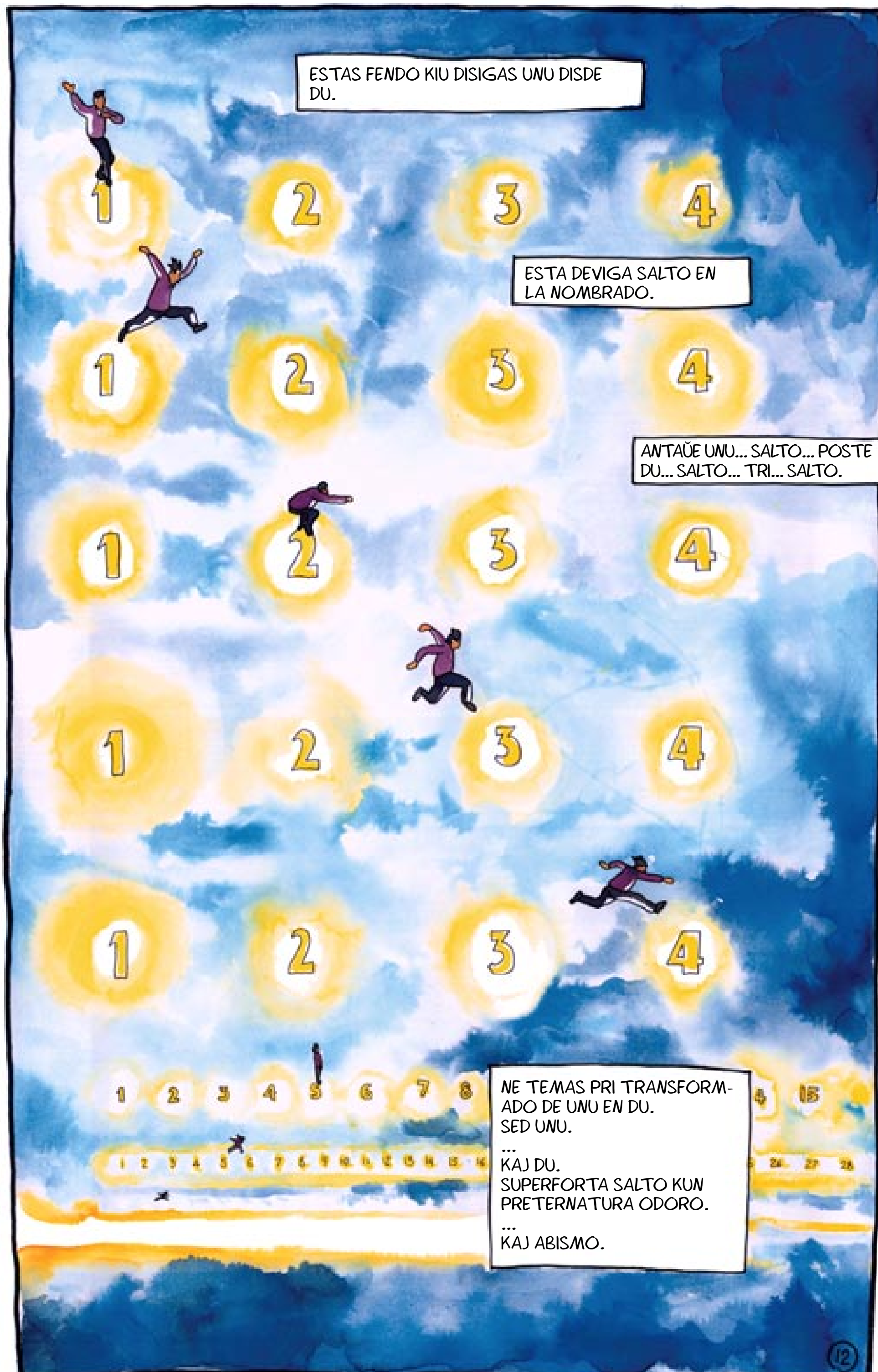

TA TAK
SKRIIIK
EKZISTAS ALIAJ BILDIGOJ, SED LA AFERO NE ŜANĜIĜAS.
TAK
TAK
FSSS
FSSS
FSSS
FSSS
JEN ALIA BILDIGO.
TAK
TIK
TAK
TA-TAK
TAK
TIU ESTAS LA ARO DE LA NATURAJ NOMBROJ.


EN TIU ARO NI PRETENDAS PREZENTI SENNOMBRAJN PUNKTETOJN.
TAK TAK TIK
FSSS
KAJ TIU ESTAS LA ARO DE ĈIUJ HOMOJ, KIUJ VIVAS SUR LA TERO.
VI KOMPRENAS BONE KE TEMAS PRI SENELIRA SITUACIO.
SENDEPENDE DE KIOM LA HOMARO PLIIĜAS KAJ PROLIFERAS, NI NENIAM ESTOS SENLIMAJ LAŬ NOMBRO.
HOMOJ ESTAS, KIEL MI POVAS DIRI...
LIMIGITAJ...
KAJ TIU LIMECO ENTENAS INTERESAJN ECOJN KOMPARE KUN SENLIMO.
KIEL MAJSTRE EKZEMPLAS LA PARADOKSO DE HILBERT.

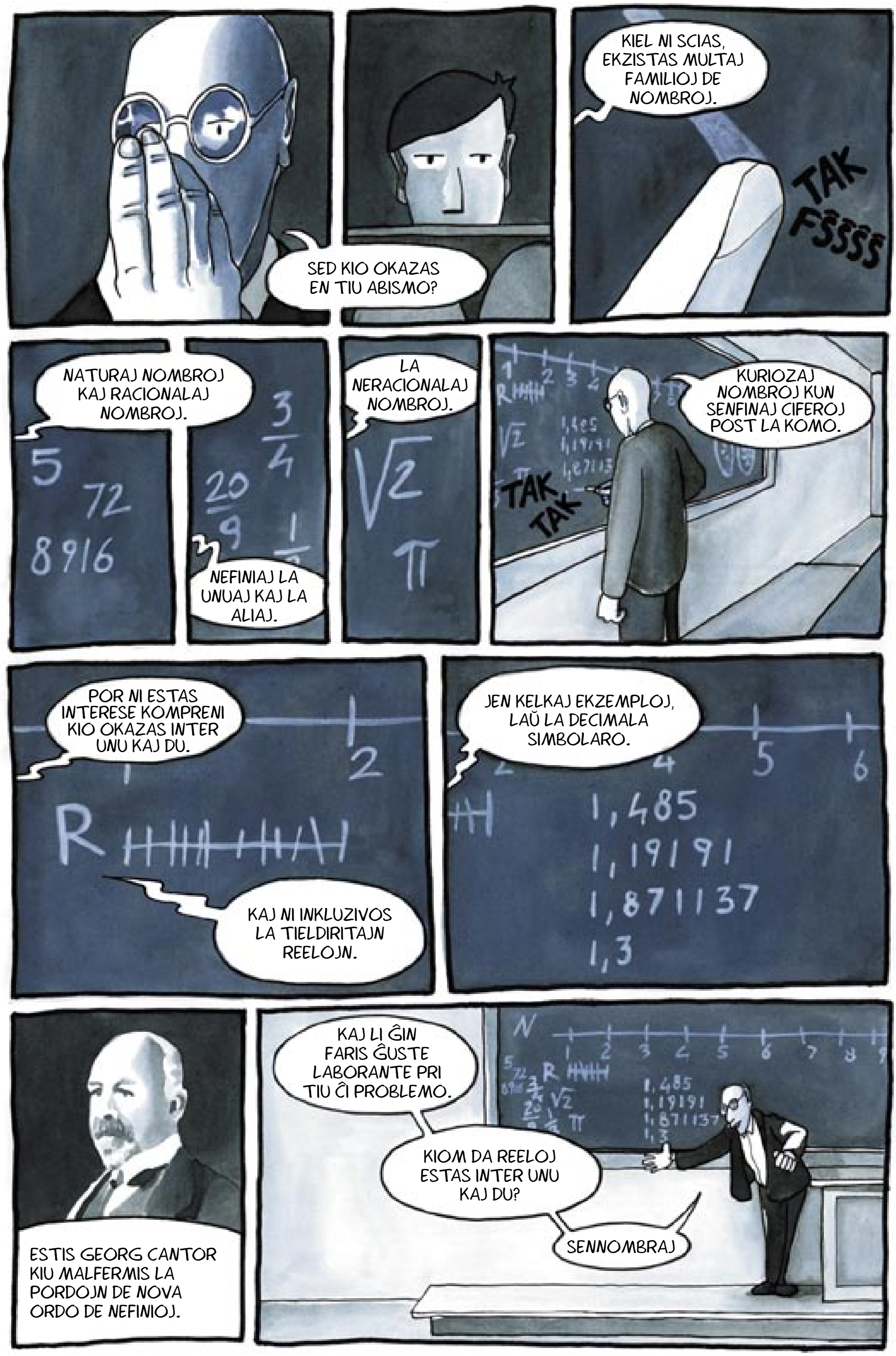

LA EMINENTA DOKTORO DAVID HILBERT...
UNU VESPERON, DOKTORO HILBERT ALVENIS AL LA HOTELO DE LA SENNOMBRAJ ĈAMBROJ...
BONAN VESPERON. MI DEZIRUS ĈAMBRON.
MI BEDAŬRAS... NI NE HAVAS LIBERAJN.
KIEL EBLAS? ĈU VI NE DISPONAS PRI SENNOMBRAJ ĈAMBROJ?
MI BEDAŬRAS.
AŬSKULTU MIN. AVIZU LA SENNOMBRAJN GASTOJN DE LA HOTELO KAJ PETU ILIN KE ĈIU TRANSLOĜIĜU AL LA TUJ NAJBARA ĈAMBRO,
TIEL KE TIU, KIU TROVIĜAS EN LA UNUA, TRANSLOĜIĜU AL LA DUA.
TIU, KIU ESTAS EN LA DUA, TRANSLOĜIĜU AL LA TRIA.
TIU, KIU ESTAS EN LA TRIA, AL LA KVARA KTP.
TIEL KE LA UNUA ĈAMBRO LIBERIĜU KAJ MI POVU ĜIN HAVI.

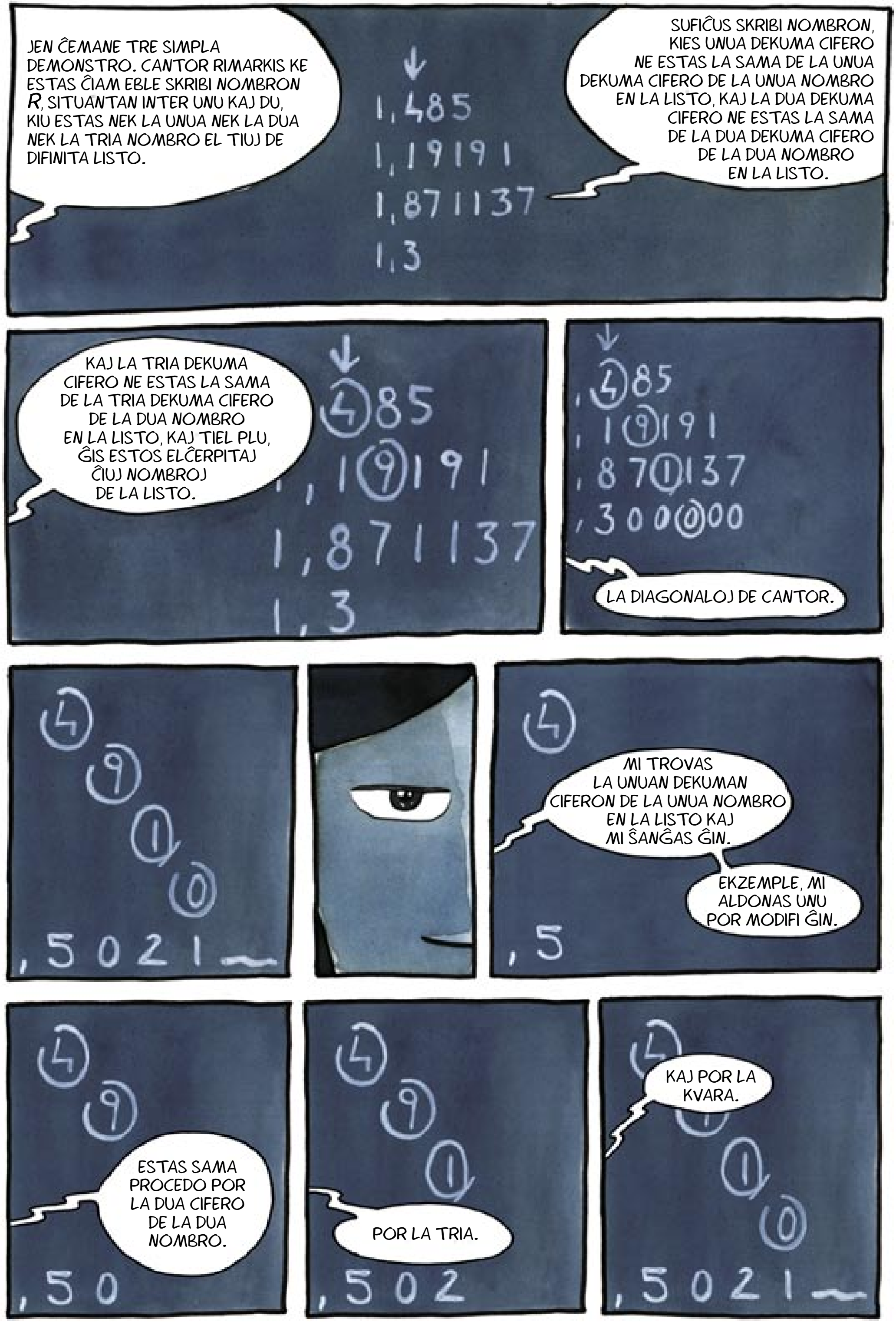
LA NEFINIO ESTAS MULTENTENA.
EN ĜI LOKIĜAS ĈIUJ NATURAJ NOMBROJ, TAMEN ILI NE PLENIGAS ĜIN.
NE EKZISTAS NATURA NOMBRO, KVANKAM GRANDA, KIU JE SIA ALTECO FLUGTUŜAS LA NEFINION.
ĈIAM PLURESTAS KVAZAŬ DISIGA AERFENDO.
ESTAS, UNUFLANKE, N KIU ALTIĜAS KAJ, ALIFLANKE, LA NEFINIO.
KAJ NENIAM ILI TUŜOS INTER SI.

EKZISTAS NEKONTINUECO EN MATEMATIKA PLEKTO.
TEMAS PRI KOMPLIKA KONCEPTO, BIZARA IDEO.
KAJ, SE NI ATENTE RIGARDAS, SAMA NEKONTINUECO, AERFENDO PLENA DE NEDIFINEBLAĴO, TROVEBLAS ANKAŬ ALILOKE, EN NIA BABILADO.
N
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
EKZEMPLE, INTER IU NOMBRO KAJ LA ALIA...
DUM N FLUGAS.

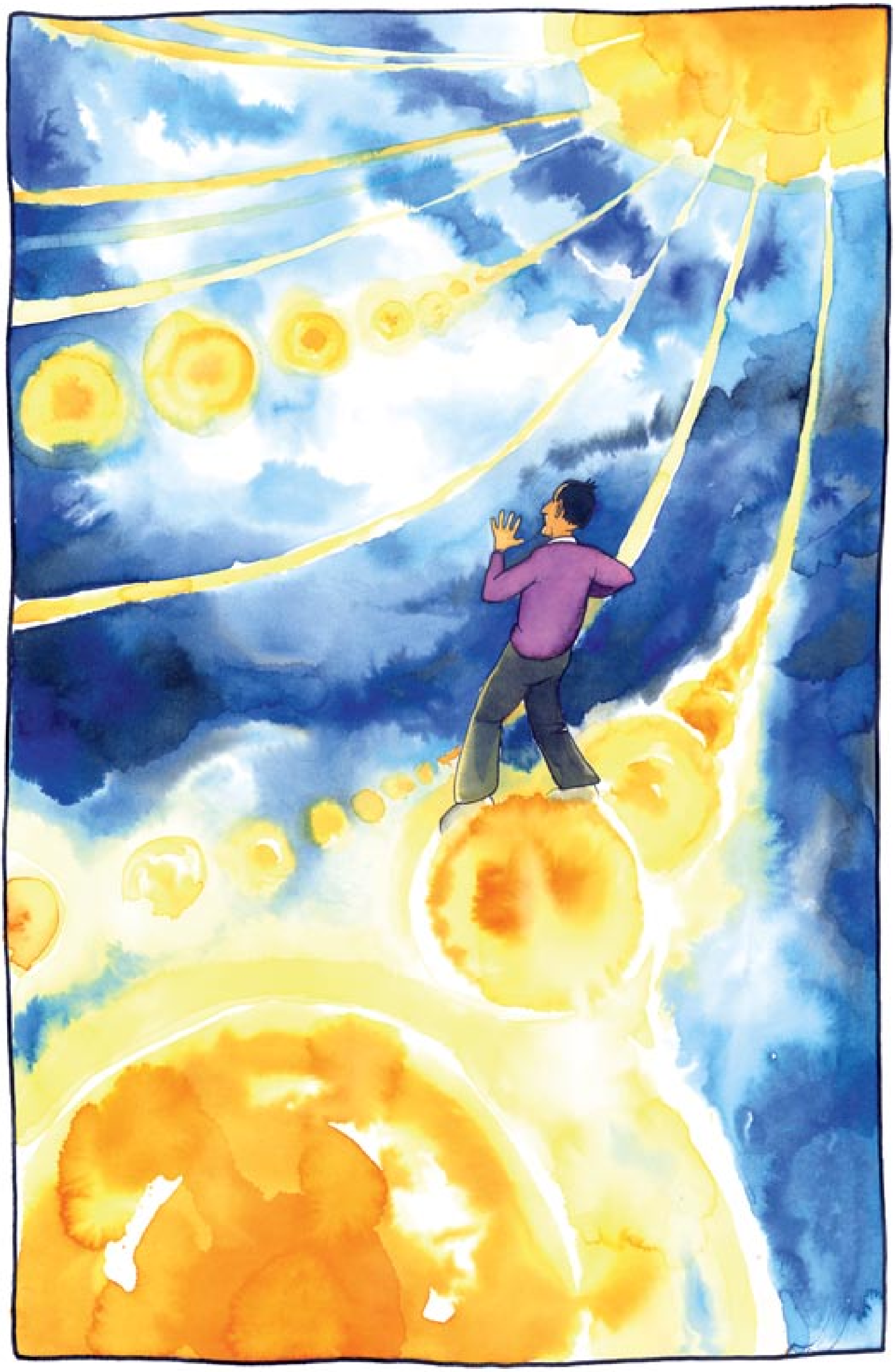

ESTAS FENDO KIU DISIGAS UNU DISDE DU.
ESTA DEVIGA SALTO EN LA NOMBRADO.
ANTAŬE UNU... SALTO... POSTE DU... SALTO... TRI... SALTO.
NE TEMAS PRI TRANSFORM-ADO DE UNU EN DU.
SED UNU.
...
KAJ DU.
SUPERFORTA SALTO KUN PRETERNATURA ODORO.
...
KAJ ABISMO.
12

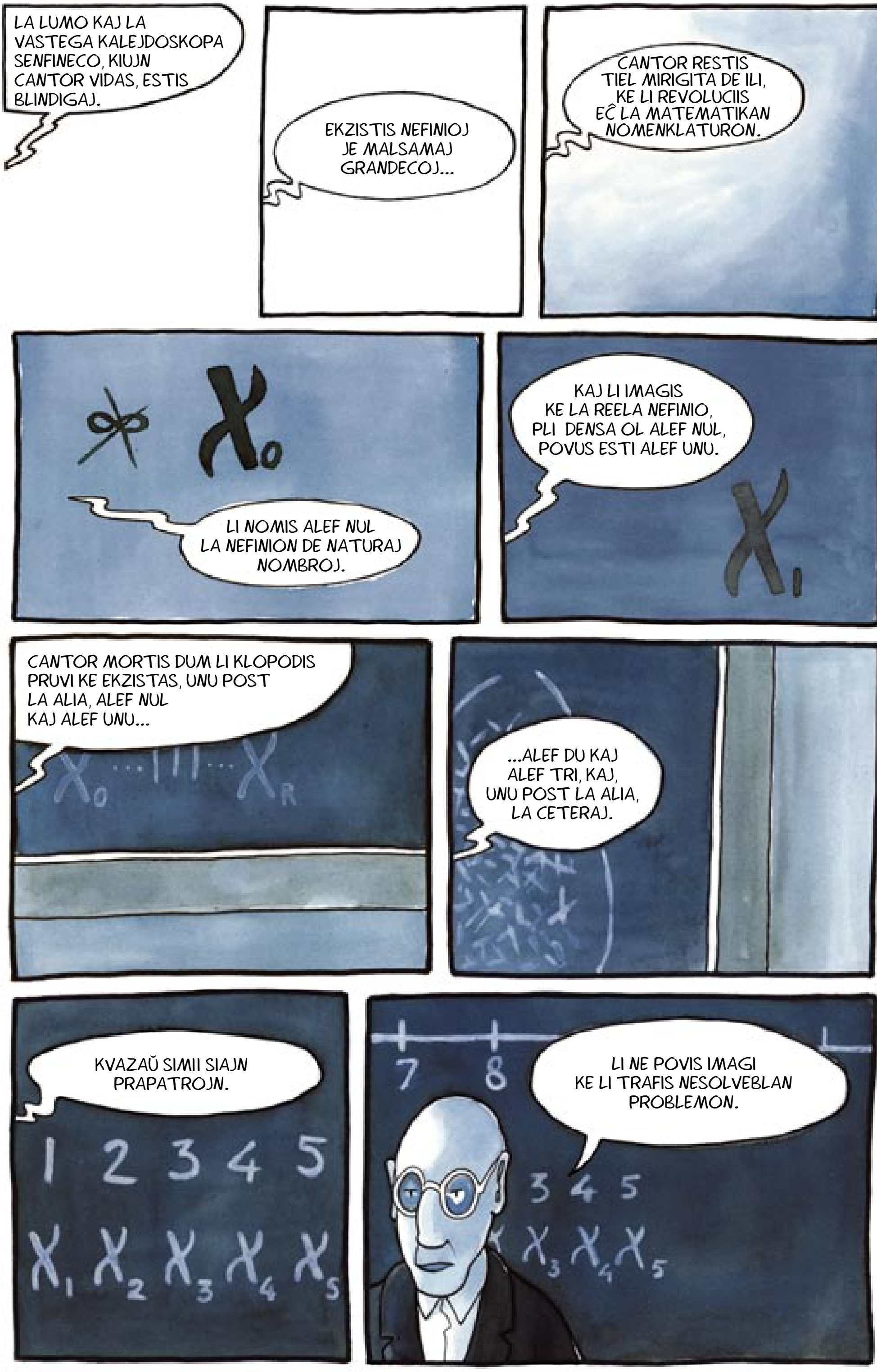
2
3
4

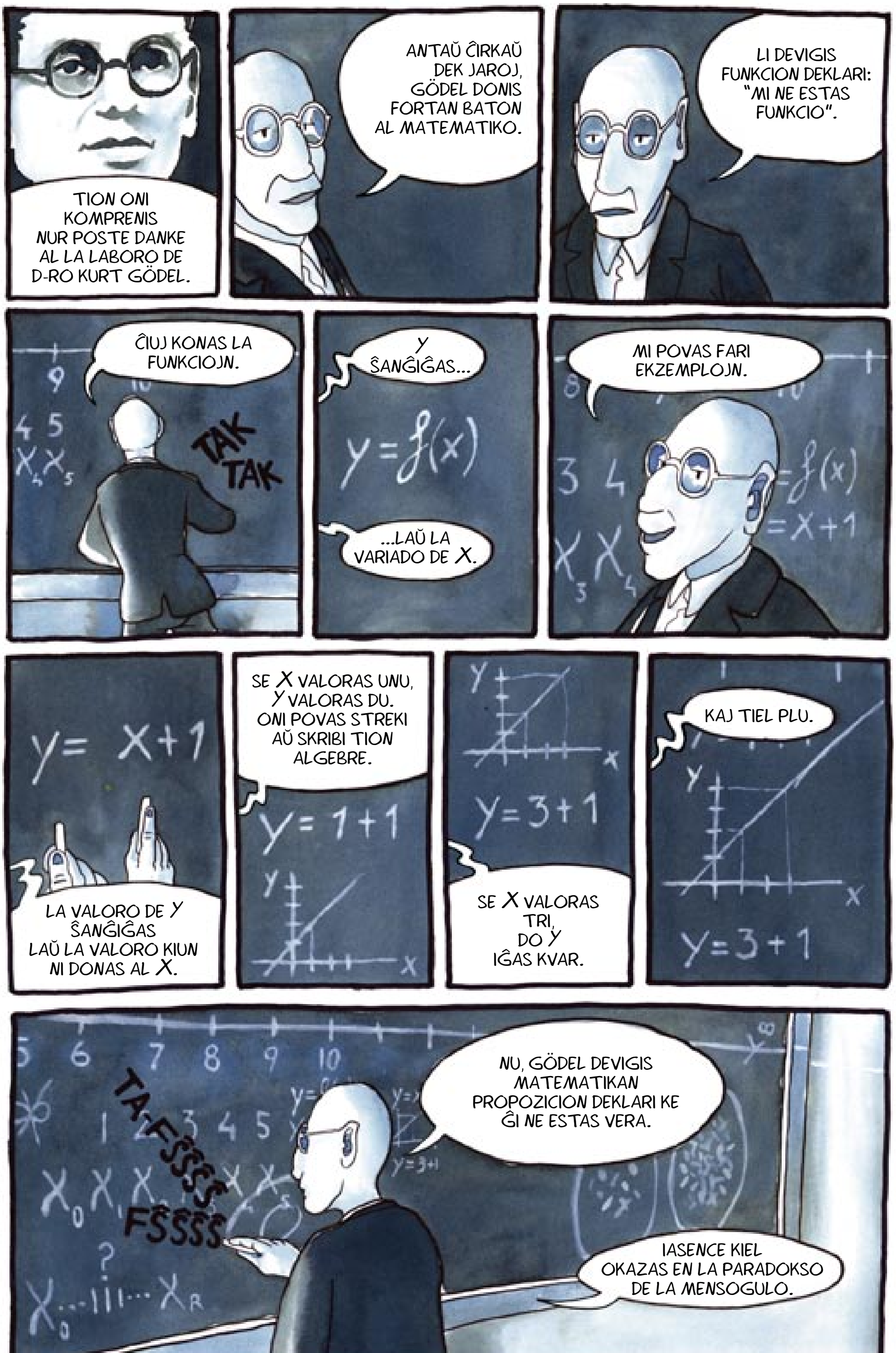

SED KIO OKAZAS EN TIU ABISMO?
KIEL NI SCIAS, EKZISTAS MULTAJ FAMILIOJ DE NOMBROJ.
TAK
FSSSS
NATURAJ NOMBROJ KAJ RACIONALAJ NOMBROJ.
5
72
8916
3/4
20/9
NEFINIAJ LA UNUAJ KAJ LA ALIAJ.
LA NERACIONALAJ NOMBROJ.
√2
π
KURIOZAJ NOMBROJ KUN SENFINAJ CIFEROJ POST LA KOMO.
TAK
TAK
POR NI ESTAS INTERESE KOMPRENI KIO OKAZAS INTER UNU KAJ DU.
2
R
KAJ NI INKLUZIVOS LA TIELDIRITAJN REELOJN.
JEN KELKAJ EKZEMPLOJ, LAŬ LA DECIMALA SIMBOLARO.
4
5
6
1,485
1,19191
1,871137
1,3
KAJ LI ĜIN FARIS ĜUSTE LABORANTE PRI TIU ĈI PROBLEMO.
KIOM DA REELOJ ESTAS INTER UNU KAJ DU?
SENNOMBRAJ
ESTIS GEORG CANTOR KIU MALFERMIS LA PORDOJN DE NOVA ORDO DE NEFINIOJ.


JEN ĈEMANE TRE SIMPLA DEMONSTRO. CANTOR RIMARKIS KE ESTAS ĈIAM EBLE SKRIBI NOMBRON R, SITUANTAN INTER UNU KAJ DU, KIU ESTAS NEK LA UNUA NEK LA DUA NEK LA TRIA NOMBRO EL TIUJ DE DIFINITA LISTO.
1,485
1,19191
1,871137
1,3
SUFIĈUS SKRIBI NOMBRON, KIES UNUA DEKUMA CIFERO NE ESTAS LA SAMA DE LA UNUA DEKUMA CIFERO DE LA UNUA NOMBRO EN LA LISTO, KAJ LA DUA DEKUMA CIFERO NE ESTAS LA SAMA DE LA DUA DEKUMA CIFERO DE LA DUA NOMBRO EN LA LISTO.
KAJ LA TRIA DEKUMA CIFERO NE ESTAS LA SAMA DE LA TRIA DEKUMA CIFERO DE LA DUA NOMBRO EN LA LISTO, KAJ TIEL PLU, ĜIS ESTOS ELĈERPITAJ ĈIUJ NOMBROJ DE LA LISTO.
LA DIAGONALOJ DE CANTOR.
,5021
MI TROVAS LA UNUAN DEKUMAN CIFERON DE LA UNUA NOMBRO EN LA LISTO KAJ MI ŜANĜAS ĜIN.
EKZEMPLE, MI ALDONAS UNU POR MODIFI ĜIN.
,5
ESTAS SAMA PROCEDO POR LA DUA CIFERO DE LA DUA NOMBRO.
,50
POR LA TRIA.
,502
KAJ POR LA KVARA.
,5021

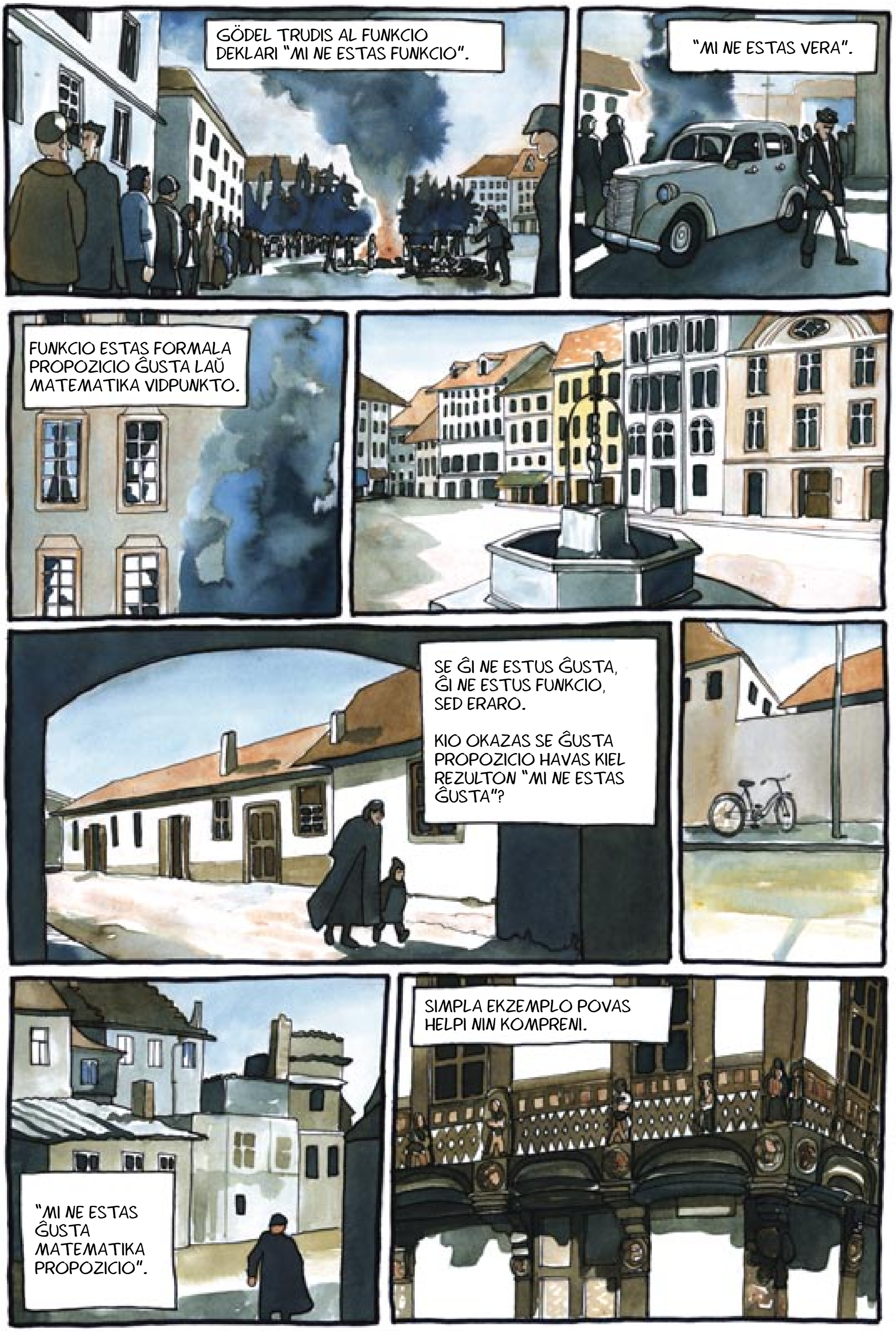
TIEL, MI CERTAS KE MI SKRIBAS NOMBRON SENDUBE MALSAMAN OL LA UNUA.
OL LA DUA.
OL LA TRIA.
OL LA KVARA KAJ TIEL PLU.
KAJ, KUN LA PASO DE LA TEMPO, ONI EKRIMARKAS KE LA LUDO FUNKCIAS EĈ SE LA LISTO ESTAS FARITA DE SENNOMBRAJ NOMBROJ KUN SENNOMBRAJ CIFEROJ POST LA KOMO.
ĈIAM EBLAS SKRIBI NOVAN NOMBRON KAJ ALDONI ĜIN AL LA LISTO.
DO, INTER UNU KAJ DU EKZISTAS SENNOMBRAJ ALIAJ NOMBROJ, KAJ CANTOR MALKOVRIS NOVAN NEFINION KUNTIRIĜINTAN EN TIU NEKREDEBLA ANFRAKTO.
SUPERORDA NEFINIO.
ALEF.
KAJ KIAM MI PAROLAS PRI SUPERORDA NEFINIO, MI CELAS ENTON PLI GRANDAN OL LA NEFINIO AL KIU LA NATURAJ NOMBROJ DIREKTIĜAS.
DIRITE ALIMANIERE: EKZISTAS PLI DA NOMBROJ R INTER UNU KAJ DU OL NOMBROJ N KURANTAJ SUR LA REKTO DE NATURAJ NOMBROJ.




LA LUMO KAJ LA VASTEGA KALEJDOSKOPA SENFINECO, KIUJN CANTOR VIDAS, ESTIS BLINDIGAJ.
EKZISTIS NEFINIOJ JE MALSAMAJ GRANDECOJ...
CANTOR RESTIS TIEL MIRIGITA DE ILI, KE LI REVOLUCIIS EĈ LA MATEMATIKAN NOMENKLATURON.
LI NOMIS ALEF NUL LA NEFINION DE NATURAJ NOMBROJ.
KAJ LI IMAGIS KE LA REELA NEFINIO, PLI DENSA OL ALEF NUL, POVUS ESTI ALEF UNU.
CANTOR MORTIS DUM LI KLOPODIS PRUVI KE EKZISTAS, UNU POST LA ALIA, ALEF NUL KAJ ALEF UNU...
...ALEF DU KAJ ALEF TRI, KAJ, UNU POST LA ALIA, LA CETERAJ.
KVAZAŬ SIMII SIAJN PRAPATROJN.
1 2 3 4 5
LI NE POVIS IMAGI KE LI TRAFIS NESOLVEBLAN PROBLEMON.
7 8
3 4 5


TION ONI KOMPRENIS NUR POSTE DANKE AL LA LABORO DE D-RO KURT GÖDEL.
ANTAŬ ĈIRKAŬ DEK JAROJ, GÖDEL DONIS FORTAN BATON AL MATEMATIKO.
LI DEVIGIS FUNKCION DEKLARI: "MI NE ESTAS FUNKCIO".
ĈIUJ KONAS LA FUNKCIOJN.
TAK TAK
Y ŜANĜIĜAS...
y = f(x)
...LAŬ LA VARIADO DE X.
MI POVAS FARI EKZEMPLOJN.
y= x+1
LA VALORO DE Y ŜANĜIĜAS LAŬ LA VALORO KIUN NI DONAS AL X.
SE X VALORAS UNU, Y VALORAS DU. ONI POVAS STREKI AŬ SKRIBI TION ALGEBRE.
y= 1+1
y= 3+1
SE X VALORAS TRI, DO Y IĜAS KVAR.
KAJ TIEL PLU.
y= 3+1
TA-FSSSSS FSSSS
NU, GÖDEL DEVIGIS MATEMATIKAN PROPOZICION DEKLARI KE ĜI NE ESTAS VERA.
IASENCE KIEL OKAZAS EN LA PARADOKSO DE LA MENSOGULO.

IU KRETANO DIRAS: MI MENSOGAS .
SE LI DIRAS LA VERON, DO LI ESTAS MENSOGANTA.
KAJ LI KONTRAŬDIRAS SIN MEM.
SE, KONTRAŬE, LI DIRAS LA MALVERON, DO LI NE MENSOGAS.
TAMEN, ANKORAŬ, LI KONTRAŬDIRAS SIN MEM.

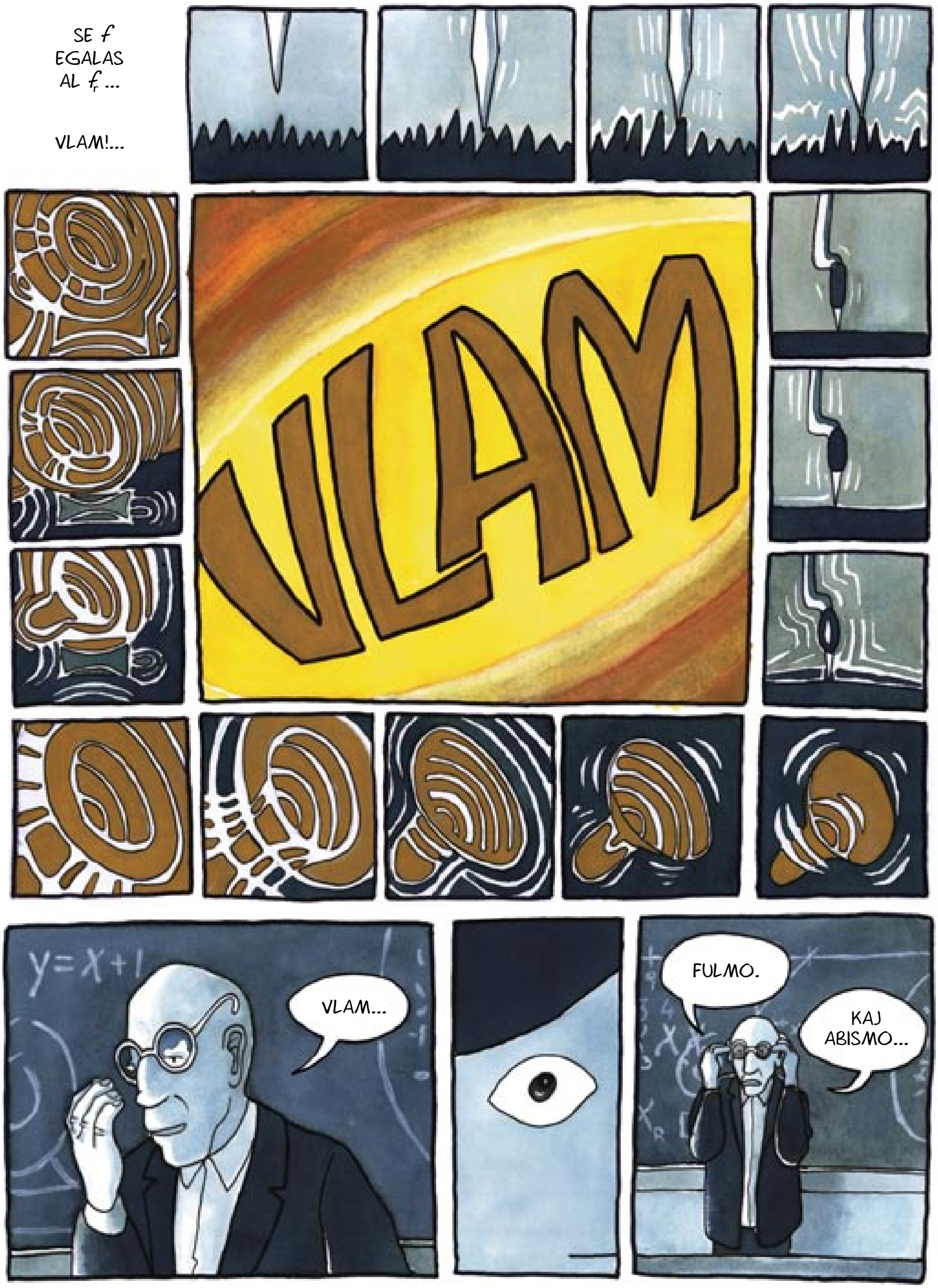

GÖDEL TRUDIS AL FUNKCIO DEKLARI "MI NE ESTAS FUNKCIO".
"MI NE ESTAS VERA".
FUNKCIO ESTAS FORMALA PROPOZICIO ĜUSTA LAŬ MATEMATIKA VIDPUNKTO.
SE ĜI NE ESTUS ĜUSTA, ĜI NE ESTUS FUNKCIO, SED ERARO.
KIO OKAZAS SE ĜUSTA PROPOZICIO HAVAS KIEL REZULTON "MI NE ESTAS ĜUSTA"?
"MI NE ESTAS ĜUSTA MATEMATIKA PROPOZICIO".
SIMPLA EKZEMPLO POVAS HELPI NIN KOMPRENI.

NI PENSU PRI GRAMOFONO.
PRI LA NADLO.
PRI LA TRUMPETO.
PRI LA DISKOPLATO.
PRI LA BAZO.
NI PENSU PRI LA DISKOJ.
GRAMOFONO LUDAS DISKOJN.
FOR DE METAFORO, LA GRAMOFONO ESTAS LA MATEMATIKO.
LA DISKOJ ESTAS LA FORMALAJ PROPOZICIOJ, LA MATEMATIKAJ FUNKCIOJ.
KAJ JEN NI POVAS LUDI MULTNOMBRAJN DISKOJN, LAŬ LA OKAZOJ.
SED EKZISTAS ALMENAŬ UNU DISKO POR ĈIU GRAMOFONO, KIU NE POVAS ESTI LUDATA.
PUNO: RESONANCIĜO DE LA TUTA SISTEMO DISKO-GRAMOFONO.
MI KLARIGAS: SUR LA DISKO ESTAS ENGRAVURITA LA FREKVENCO f. LA NADLO TRADUKAS LA KANELON KAJ VIBRAS LAŬ LA TRUDO DE f. LA TRUMPETO KANTAS F KAJ VIBRIGAS LAŬ f LA TUTAN GRAMOFONON.

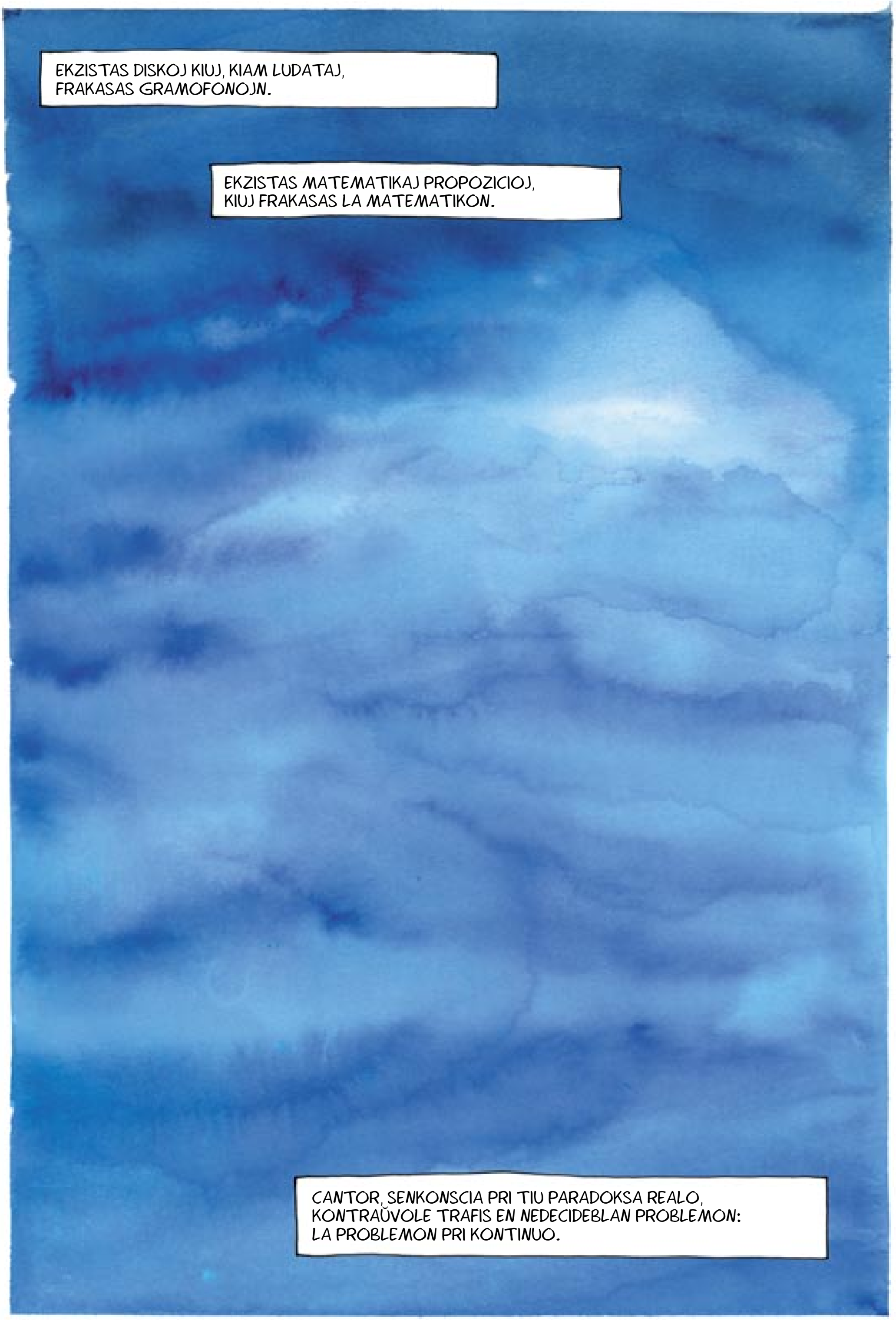
NUN, ĈIU SISTEMO, PRO SIAJ PROPRAJ STRUKTURO KAJ MASO KAJ VOLUMENO, HAVAS APARTAN RESONANCAN FREKVENCON f_r KAJ LA SISTEMO DISKO-GRAMOFONO NE ESCEPTAS.
SE SUR LA DISKO ESTAS ENGRAVURITA FREKVENCO f_r, KION LUDOS LA GRAMOFONO?

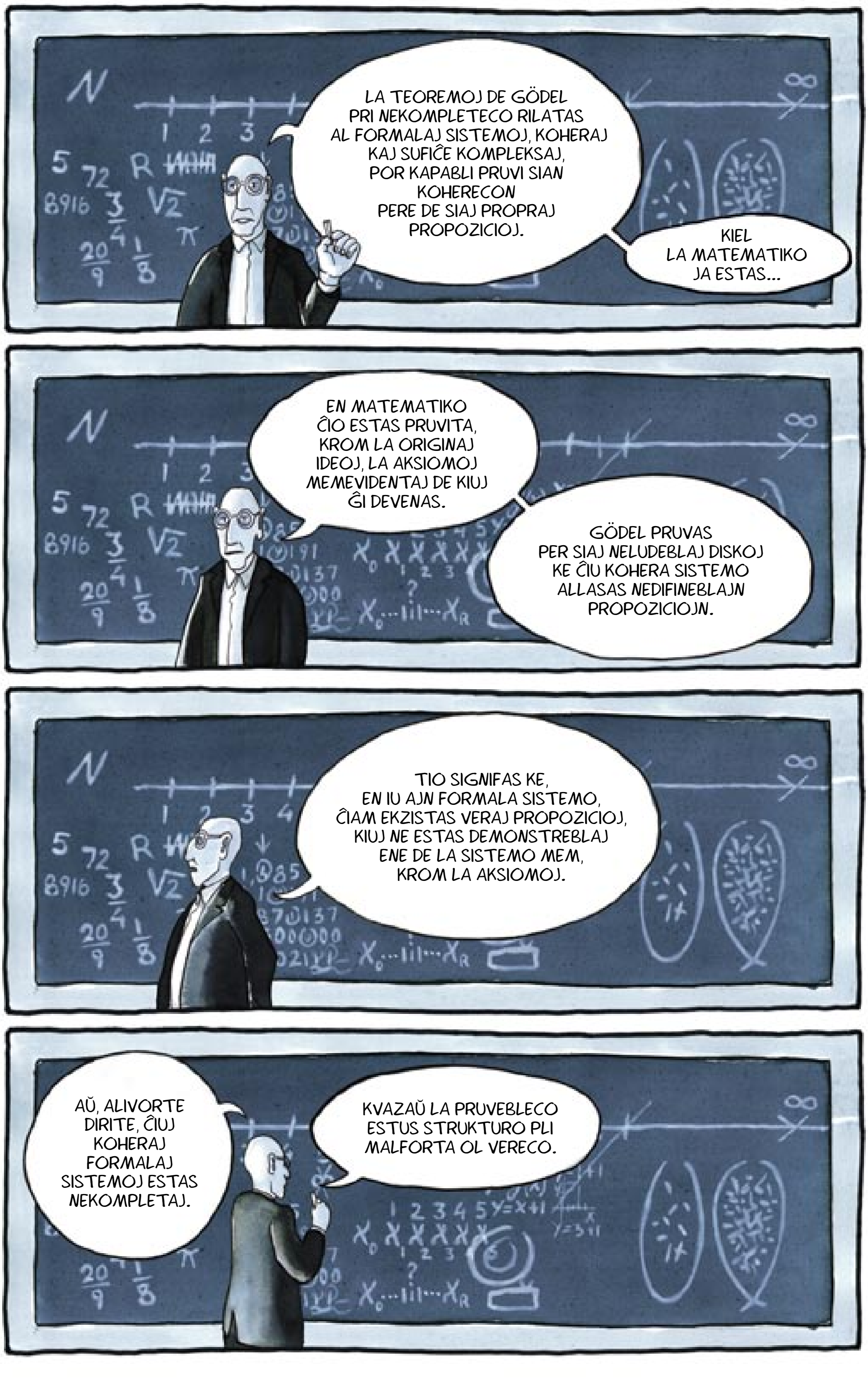
SE f EGALAS AL f_r...

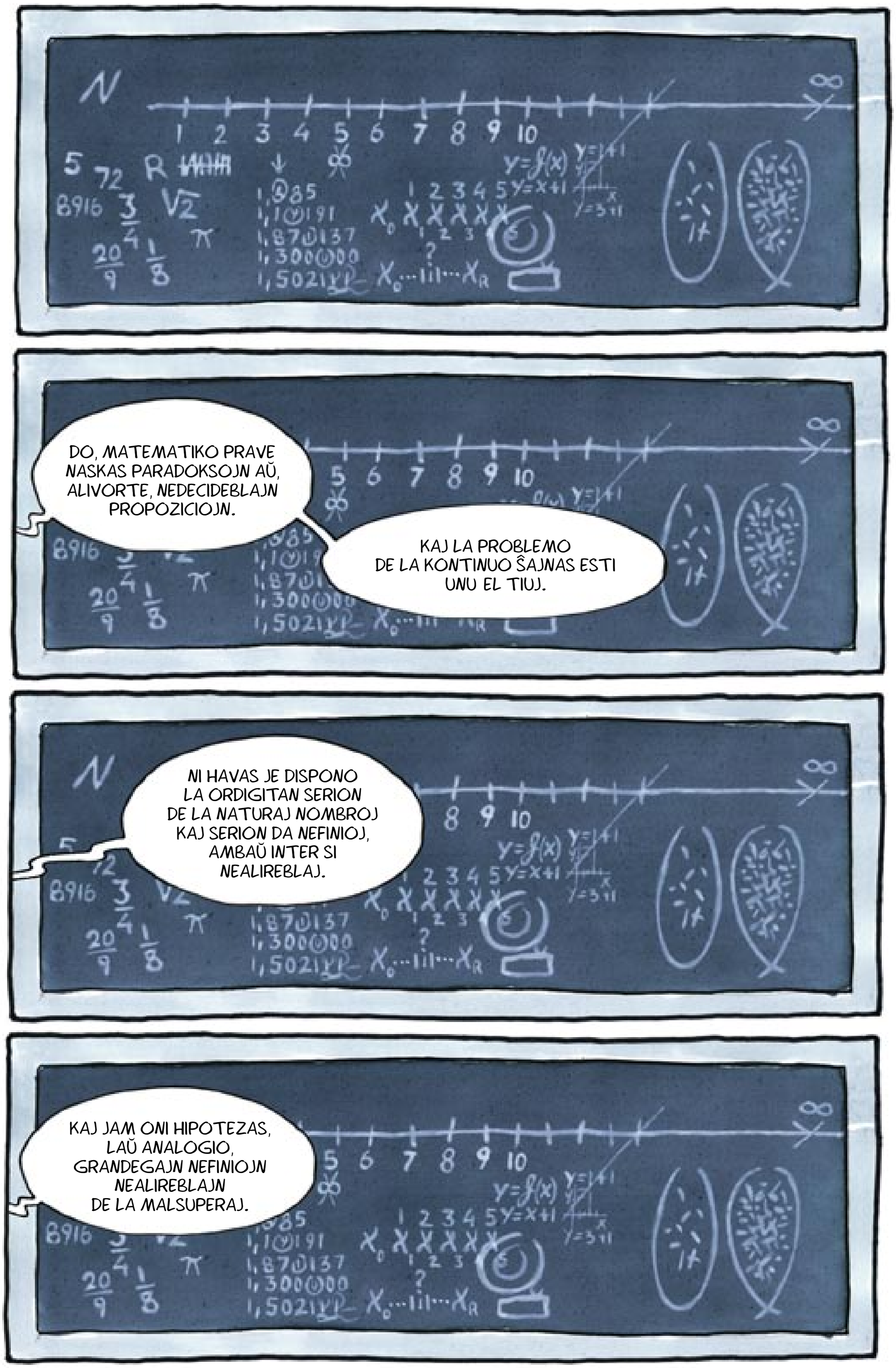
VLAM!...



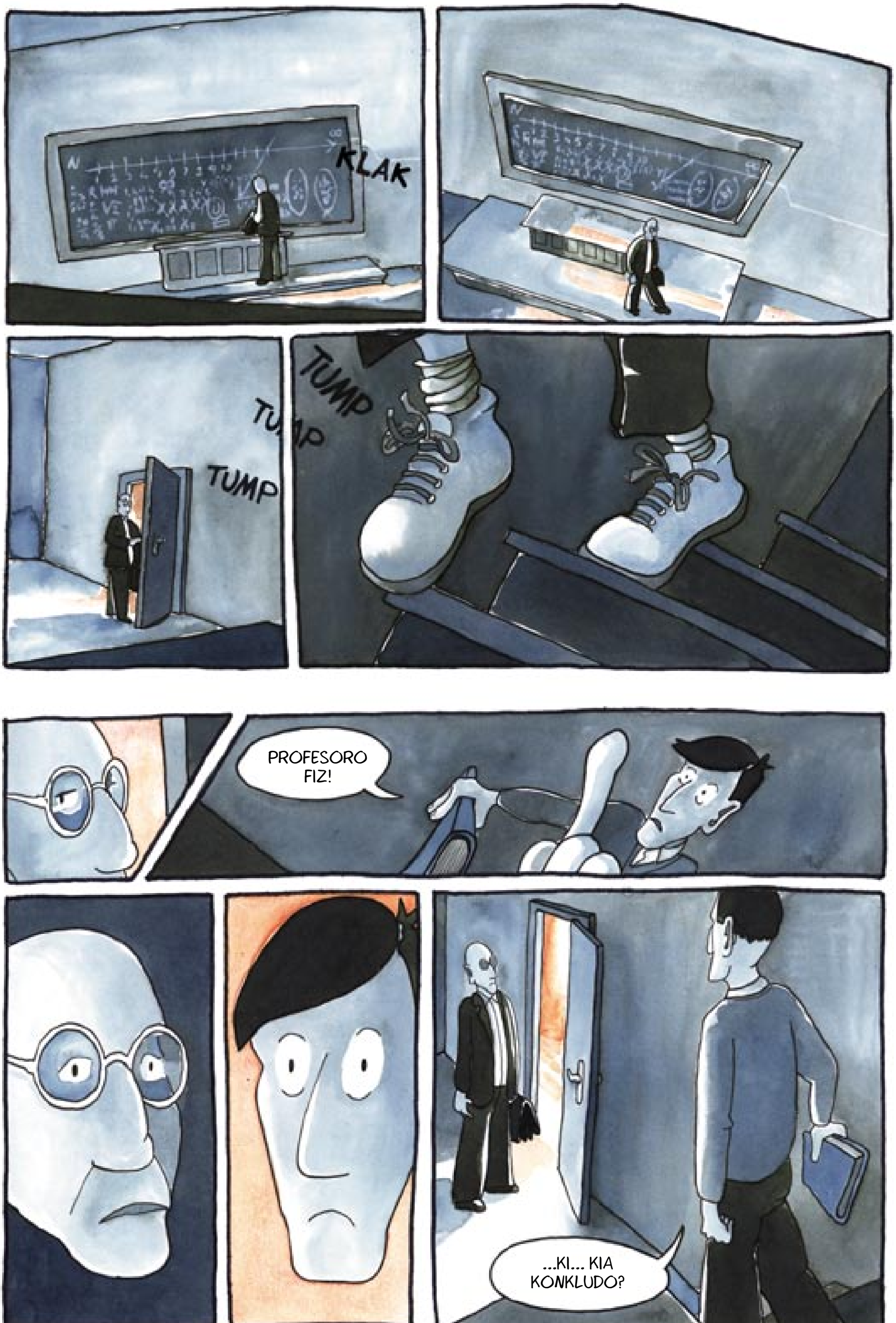
GÖDEL MALKOVRIS KE EKZISTAS MATEMATIKAJ ASERTOJ NEDECIDEBLAJ, PARADOKSAJ, KIES SOLVON NE EBLAS VORTIGI.
SAME KIEL, EN KOMUNA PAROLO, ESTAS SENSENCE KLOPODI DECIDI ĈU LA KRETANO MENSOGAS AŬ DIRAS LA VERON.

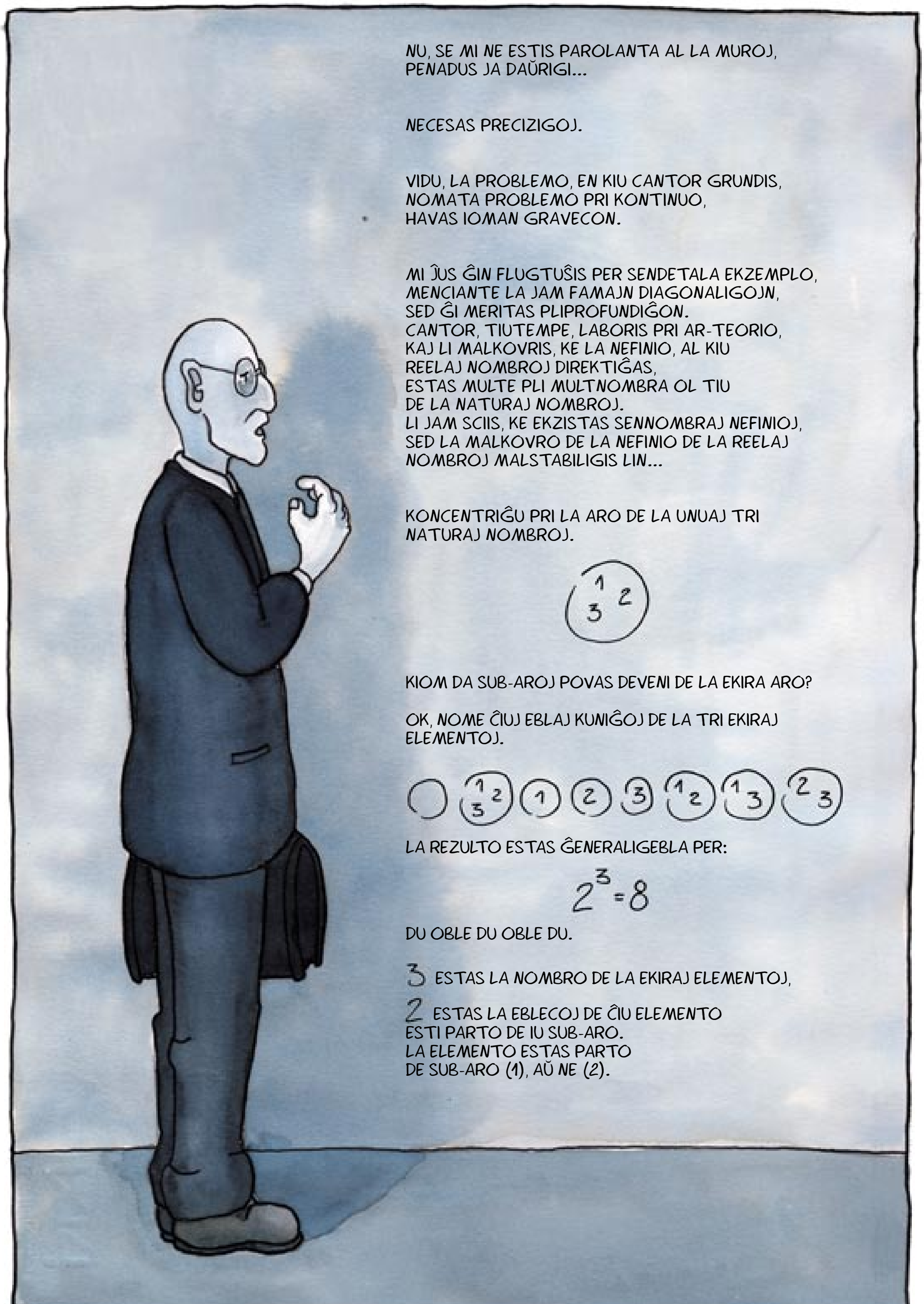

EKZISTAS DISKOJ KIUJ, KIAM LUDATAJ, FRAKASAS GRAMOFONOJN.
EKZISTAS MATEMATIKAJ PROPOZICIOJ, KIUJ FRAKASAS LA MATEMATIKON.
CANTOR, SENKONSCIA PRI TIU PARADOKSA REALO, KONTRAŬVOLE TRAFIS EN NEDECIDEBLAN PROBLEMON: LA PROBLEMON PRI KONTINUO.

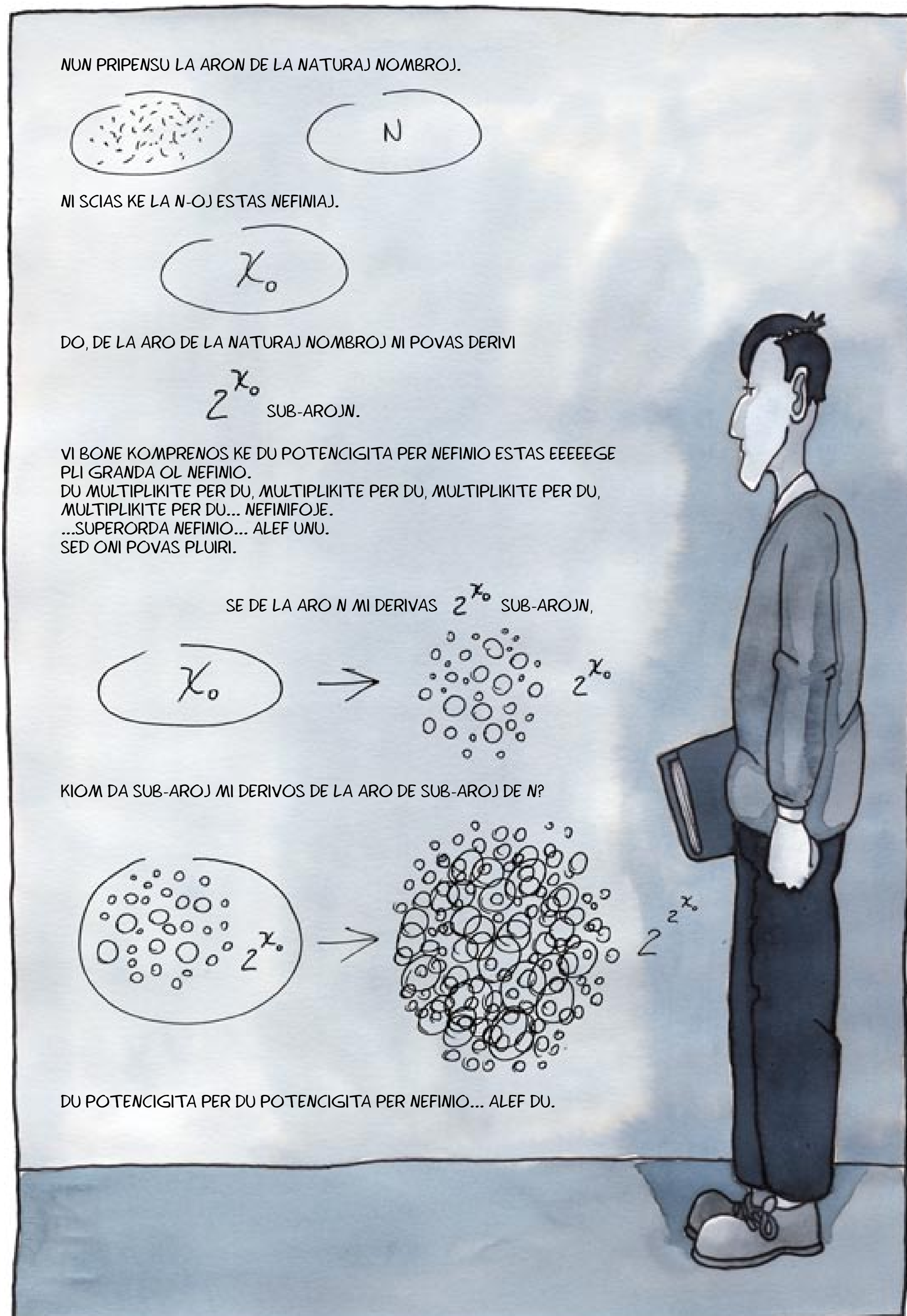

LA TEOREMOJ DE GÖDEL PRI NEKOMPLETECO RILATAS AL FORMALAJ SISTEMOJ, KOHERAJ KAJ SUFIĈE KOMPLEKSAJ, POR KAPABLI PRUVI SIAN KOHERECON PERE DE SIAJ PROPRAJ PROPOZICIOJ.
KIEL LA MATEMATIKO JA ESTAS...
EN MATEMATIKO ĈIO ESTAS PRUVITA, KROM LA ORIGINAJ IDEOJ, LA AKSIOMOJ MEMEVIDENTAJ DE KIUJ ĜI DEVENAS.
GÖDEL PRUVAS PER SIAJ NELUDEBLAJ DISKOJ KE ĈIU KOHERA SISTEMO ALLASAS NEDIFINEBLAJN PROPOZICIOJN.
TIO SIGNIFAS KE, EN IU AJN FORMALA SISTEMO, ĈIAM EKZISTAS VERAJ PROPOZICIOJ, KIUJ NE ESTAS DEMONSTREBLAJ ENE DE LA SISTEMO MEM, KROM LA AKSIOMOJ.
AŬ, ALIVORTE DIRITE, ĈIUJ KOHERAJ FORMALAJ SISTEMOJ ESTAS NEKOMPLETAJ.
KVAZAŬ LA PRUVEBLECO ESTUS STRUKTURO PLI MALFORTA OL VERECO.

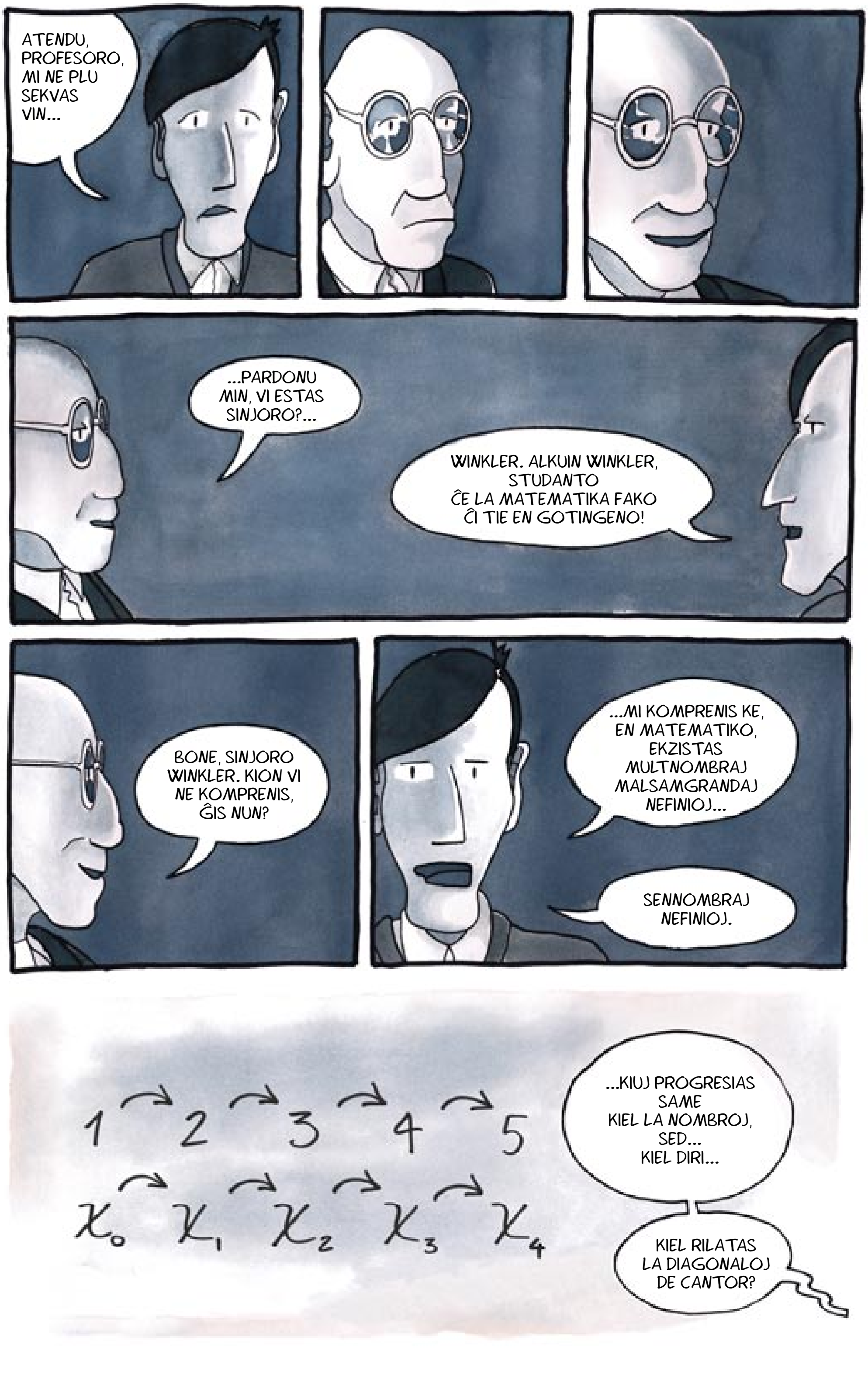

DO, MATEMATIKO PRAVE NASKAS PARADOKSOJN AŬ, ALIVORTE, NEDECIDEBLAJN PROPOZICIOJN.
KAJ LA PROBLEMO DE LA KONTINUO ŜAJNAS ESTI UNU EL TIUJ.
NI HAVAS JE DISPONO LA ORDIGITAN SERION DE LA NATURAJ NOMBROJ KAJ SERION DA NEFINIOJ, AMBAŬ INTER SI NEALIREBLAJ.
KAJ JAM ONI HIPOTEZAS, LAŬ ANALOGIO, GRANDEGAJN NEFINIOJN NEALIREBLAJN DE LA MALSUPERAJ.

KAJ TIEL, PLI MALPLI, NI ATINGAS LA FINON DE NIA...
KLAK KLAK
?
PARDONU MIN, PROFESORO FIZ...
NE ESTIS MIA INTENCO...
MIN PARDONU VI... MI TUJ FORIROS!
BONAN VESPERON, KARLO...
AL VI, PROFESORO.
PROFESORO FIZ...
ESTAS TUMULTOJ EN LA URBO...
ESTUS PLI PRUDENTE EVITI LA URBO-CENTRON KAJ IRI LAŬ STRATO BÜRGER.
ĜIS LA REVIDO.


KLAK
TUMP
TUMP
TUMP
PROFESORO FIZ!
...KI... KIA KONKLUDO?


NU, SE MI NE ESTIS PAROLANTA AL LA MUROJ, PENADUS JA DAŬRIGI...
NECESAS PRECIZIGOJ.
VIDU, LA PROBLEMO, EN KIU CANTOR GRUNDIS, NOMATA PROBLEMO PRI KONTINUO, HAVAS IOMAN GRAVECON.
MI ĴUS ĜIN FLUGTUŜIS PER SENDETALA EKZEMPLO, MENCIANTE LA JAM FAMAJN DIAGONALIGOJN, SED ĜI MERITAS PLIPROFUNDIĜON. CANTOR, TIUTEMPE, LABORIS PRI AR-TEORIO, KAJ LI MALKOVRIS, KE LA NEFINIO, AL KIU REELAJ NOMBROJ DIREKTIĜAS, ESTAS MULTE PLI MULTNOMBRA OL TIU DE LA NATURAJ NOMBROJ. LI JAM SCIIS, KE EKZISTAS SENNOMBRAJ NEFINIOJ, SED LA MALKOVRO DE LA NEFINIO DE LA REELAJ NOMBROJ MALSTABILIGIS LIN...
KONCENTRIĜU PRI LA ARO DE LA UNUAJ TRI NATURAJ NOMBROJ.
KIOM DA SUB-AROJ POVAS DEVENI DE LA EKIRA ARO?
OK, NOME ĈIUJ EBLAJ KUNIĜOJ DE LA TRI EKIRAJ ELEMENTOJ.
LA REZULTO ESTAS ĜENERALIGEBLA PER:
$2^3=8$
DU OBLE DU OBLE DU.
3 ESTAS LA NOMBRO DE LA EKIRAJ ELEMENTOJ,
2 ESTAS LA EBLECOJ DE ĈIU ELEMENTO ESTI PARTO DE IU SUB-ARO. LA ELEMENTO ESTAS PARTO DE SUB-ARO (1), AŬ NE (2).


NUN PRIPENSU LA ARON DE LA NATURAJ NOMBROJ.
N
NI SCIAS KE LA N-OJ ESTAS NEFINIAJ.
$\aleph_0$
DO, DE LA ARO DE LA NATURAJ NOMBROJ NI POVAS DERIVI
$2^{\aleph_0}$ SUB-AROJN.
VI BONE KOMPRENOS KE DU POTENCIGITA PER NEFINIO ESTAS EEEEEGE PLI GRANDA OL NEFINIO.
DU MULTIPLIKITE PER DU, MULTIPLIKITE PER DU, MULTIPLIKITE PER DU, MULTIPLIKITE PER DU... NEFINIFOJE.
...SUPERORDA NEFINIO... ALEF UNU.
SED ONI POVAS PLUIRI.
SE DE LA ARO N MI DERIVAS $2^{\aleph_0}$ SUB-AROJN,
$\aleph_0$
$2^{\aleph_0}$
KIOM DA SUB-AROJ MI DERIVOS DE LA ARO DE SUB-AROJ DE N?
$2^{\aleph_0}$
$2^{2^{\aleph_0}}$
DU POTENCIGITA PER DU POTENCIGITA PER NEFINIO... ALEF DU.

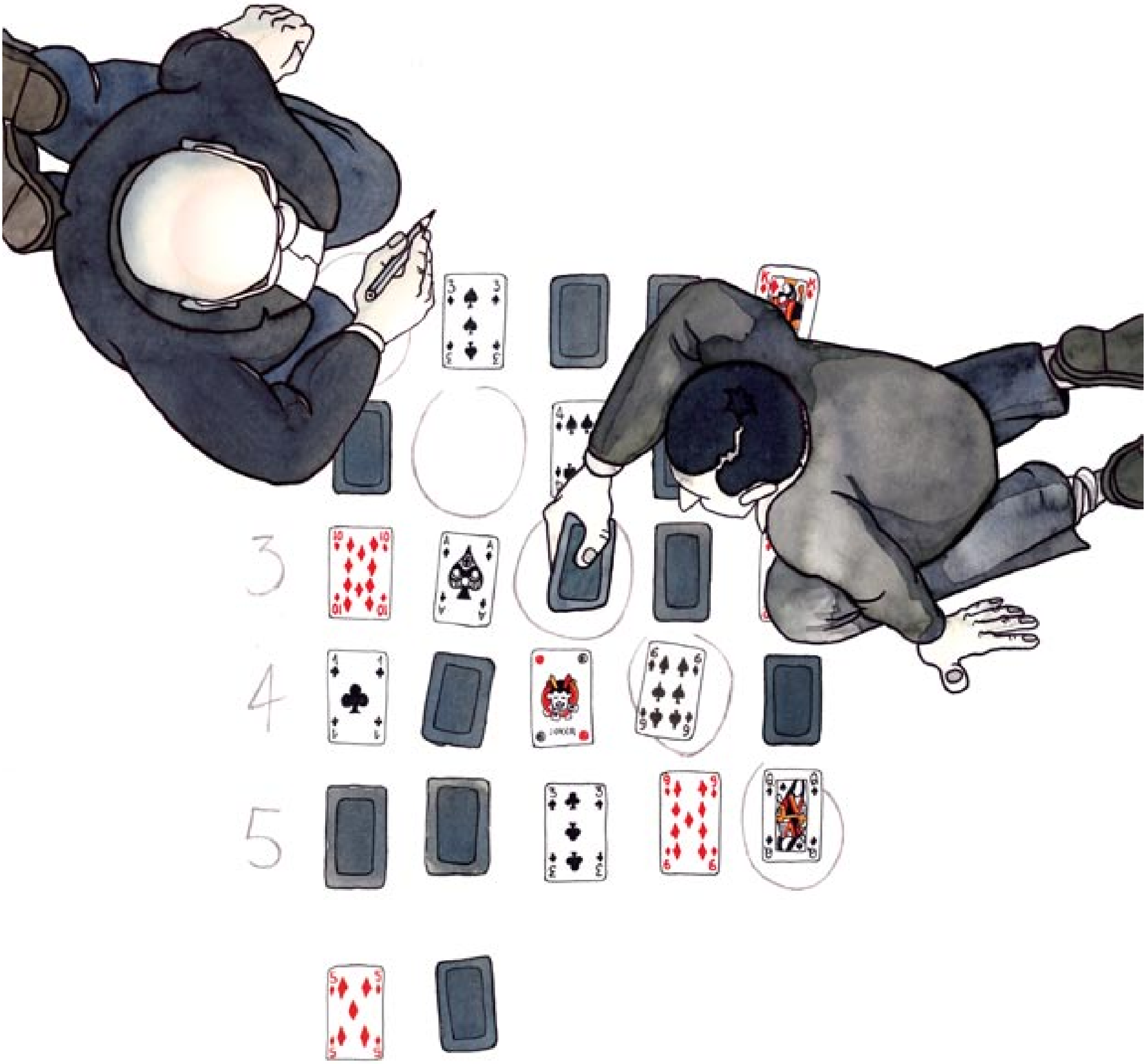

ATENDU, PROFESORO, MI NE PLU SEKVAS VIN...
...PARDONU MIN, VI ESTAS SINJORO?...
WINKLER. ALKUIN WINKLER, STUDANTO ĈE LA MATEMATIKA FAKO ĈI TIE EN GOTINGENO!
BONE, SINJORO WINKLER. KION VI NE KOMPRENIS, ĜIS NUN?
...MI KOMPRENIS KE, EN MATEMATIKO, EKZISTAS MULTNOMBRAJ MALSAMGRANDAJ NEFINIOJ...
SENNOMBRAJ NEFINIOJ.
1 2 3 4 5
$\aleph_0$ $\aleph_1$ $\aleph_2$ $\aleph_3$ $\aleph_4$
...KIUJ PROGRESIAS SAME KIEL LA NOMBROJ, SED... KIEL DIRI...
KIEL RILATAS LA DIAGONALOJ DE CANTOR?

PERMESU, DO, KE MI DONU KRUDAN EKZEMPLON.
FRUŜ
JEN LA LUDKARTOJ, KIUJN MI, DE TEMPO AL TEMPO, UZAS KUN MIAJ GEAMIKOJ, EN TRINKEJO.
ONI POVAS ILIN UZI POR LUDI PER LA AROJ. EKZEMPLE: KIOM DA AROJ MI POVAS KONSTRUI PER DU KARTOJ?
FRRRRR
FRRRR
DU KARTOJ; ĈIU KARTO, DU EBLECOJ. DU POTENCIGITA PER DU: KVAR.
UNU.
DU.
TRI.
KVAR.
VI VIDAS KE KARTOJ ESTAS KOVRITAJ AŬ NEKOVRITAJ.
...KAJ SE ILI ESTUS BLANKAJ, EĈ PLI BONE.
ĈAR ONI POVUS LUDI ĈIUKAZE.
...EĈ SEN VALORSIGNOJ, MI CERTIGAS ĜIN AL VI, SINJORO WINKLER.

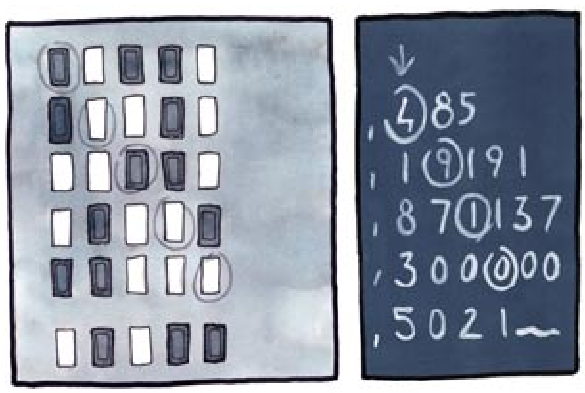
NUN NI FORMU HAZARDAJN AROJN.

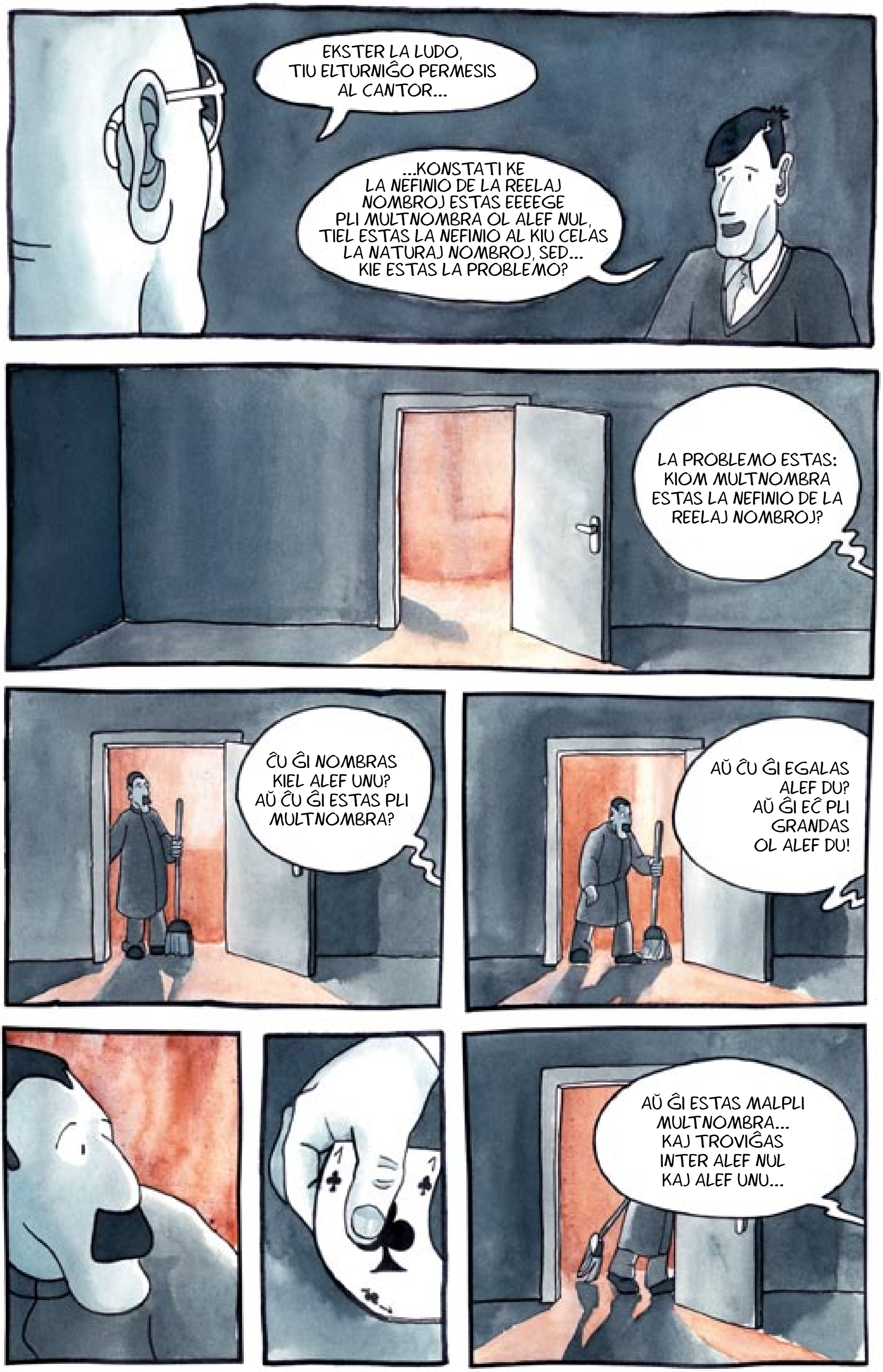
1
2
3
4
5

NI VOLAS KREI NOVAN ARON SURBAZE DE ĈI TIUJ.
PROVU TURNI LA LUDKARTOJN ĈE LA DIAGONALO, LAŬ LA METODO DE CANTOR... SAME KIEL ĈE LA TABULO.


3
4
5

ĈIAM EBLAS FORMI NOVAN ARON, MALSAMA OL ĈIUJ JAM EKZISTANTAJ...




EKSTER LA LUDO, TIU ELTURNIĜO PERMESIS AL CANTOR...
...KONSTATI KE LA NEFINIO DE LA REELAJ NOMBROJ ESTAS EEEEGE PLI MULTNOMBRA OL ALEF NUL, TIEL ESTAS LA NEFINIO AL KIU CELAS LA NATURAJ NOMBROJ, SED... KIE ESTAS LA PROBLEMO?
LA PROBLEMO ESTAS: KIOM MULTNOMBRA ESTAS LA NEFINIO DE LA REELAJ NOMBROJ?
ĈU ĜI NOMBRAS KIEL ALEF UNU? AŬ ĈU ĜI ESTAS PLI MULTNOMBRA?
AŬ ĈU ĜI EGALAS ALEF DU? AŬ ĜI EĈ PLI GRANDAS OL ALEF DU!
AŬ ĜI ESTAS MALPLI MULTNOMBRA... KAJ TROVIĜAS INTER ALEF NUL KAJ ALEF UNU...

BONVOLU ANKORAŬ SEKVI MIN. KIUN PROCEDON VI UTILIGUS POR ORDIGI ĈI TIUN ARON?
BONVOLU...
128 69 71 47 13 205 2
UNUE, MI TROVUS LA PLEJ MALGRANDAN ELEMENTON
KAJ MI PORTUS ĜIN EKSTEREN DE LA ARO.
POSTE, MI DENOVE ELEKTUS LA MALPLEJ GRANDAN EL LA CETERAJ ELEMENTOJ.
KAJ, DENOVE, MI PORTUS ĜIN EKSTEREN DE LA ARO.
KAJ TIEL PLU.
DO, KIUN PROCEDON VI UTILIGUS SE LA ELEMENTOJ ESTUS NE NOMBROJ, SED NEFINIOJ? KAJ SE ĈI TIUJ NEFINIOJ ESTUS... SENNOMBRAJ?

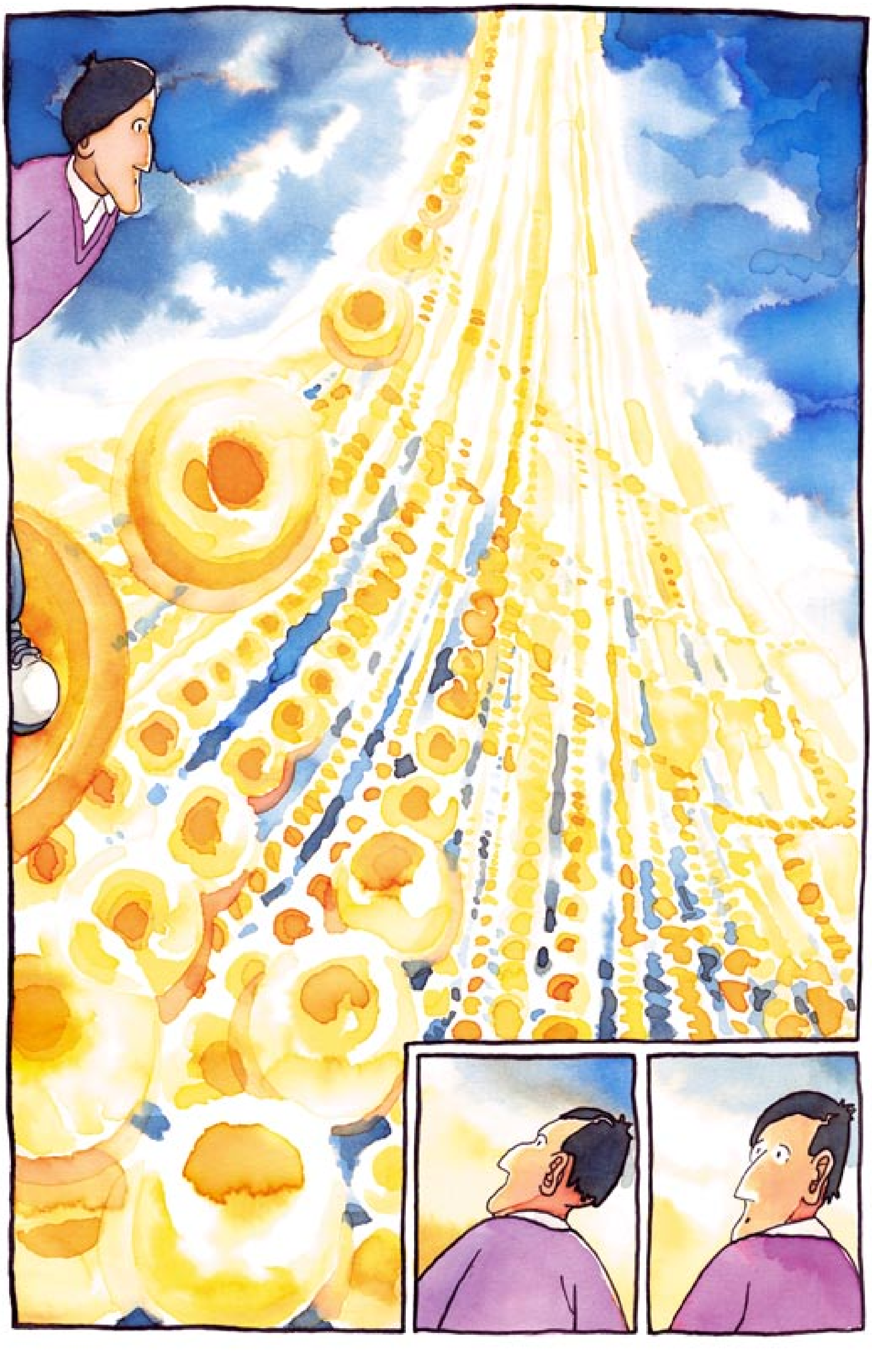
MI RIPETAS AL VI, SINJORO WINKLER: KIUN PROCEDON VI UZUS POR ORDIGI LA NEFINIOJN?

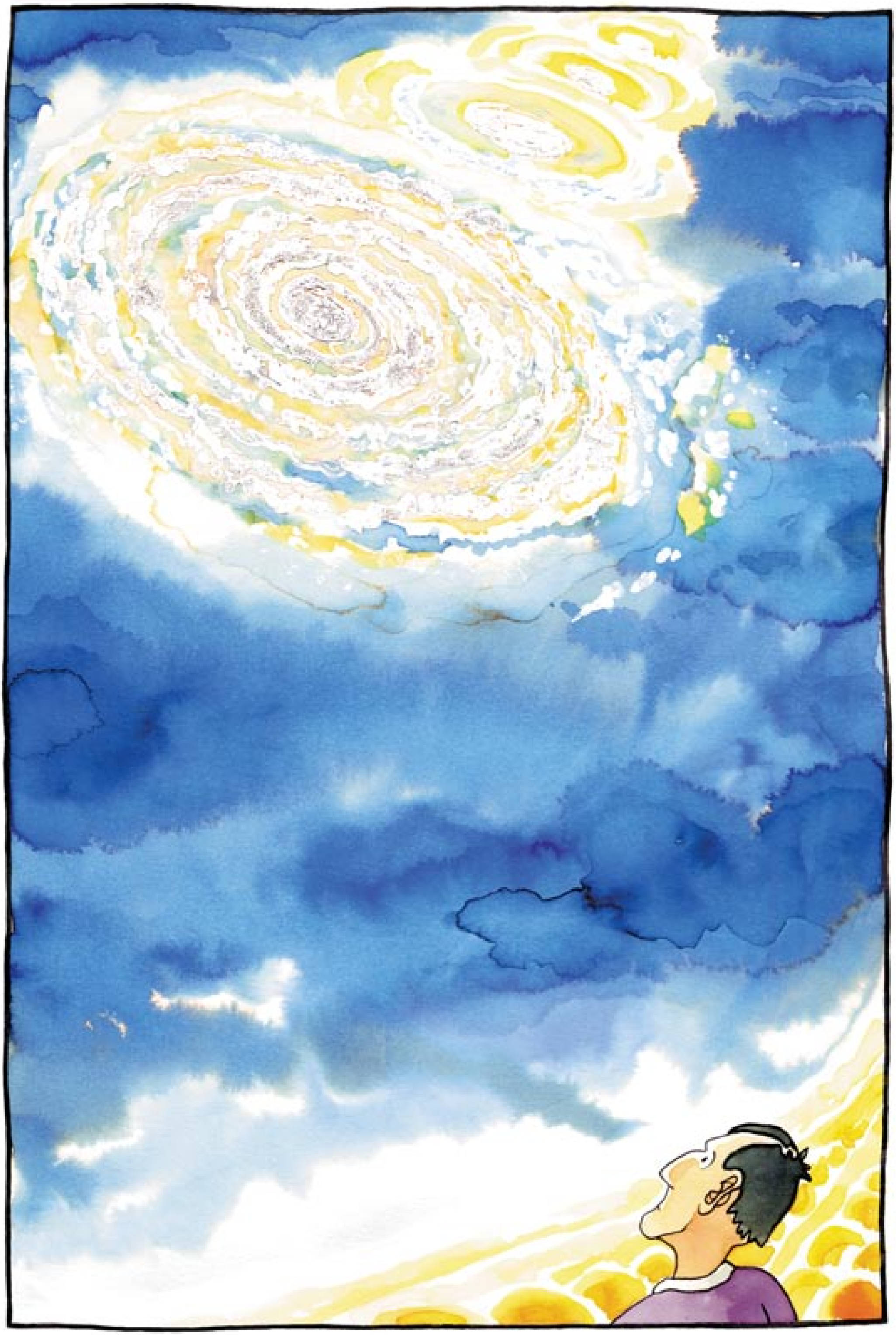
JEN LA PROBLEMO DE LA KONTINUO: MANKAS PROCEDO, KIU EBLIGU AL NI ORDIGI LA NEFINIOJN...

SE ĜI ESTUS ELPENSITA, LA PROBLEMO PRI KONTINUO ESTUS JAM SOLVITA KAJ LA DENSA GRUPO DE GÖDELAJ PARADOKSOJ ESTUS PERDINTA SIAN PLEJ EMINENTAN PERSONON!

SED EN ĈI BIZARA ESPLORO ŜAJNAS KE, JU PLI ONI PROKSIMIĜAS AL LA KERNO DE LA PROBLEMO, DES PLI LA PROBLEMO FORGLITAS.
ĈAR LA PROCEDO POR ORDIGI LA NEFINIOJN EKZISTAS. ĜI NOMIĜAS ELEKTO-AKSIOMO.
ĜI ESTIS METITA KIEL AKSIOMO FARE DE NIA KLERA KOLEGO, DOKTORO ERNST ZERMELO.
SED, VE AL NI, TEMAS PRI PROCEDO SENFINA.
ORDIGO FINITA NUR POST SENFINAJ PAŜOJ...
SPECO DE DEMONSTRO, KIU DEMONSTRUS NUR POST SENNOMBRAJ PROVOJ: SENFINA CIKLO.
IA PARADOKSO...

JA, KROMA PARADOKSO.
KROMA NEDIREBLAĴO... ĈIAM LA SAMA...
TAMEN LA AFEROJ MOVIĜAS KAJ FERMENTAS. GÖDEL INTERVENIS EN LA NUNTEMPA DEBATO PER NOVAJ KONSTERNAJ HIPOTEZOJ.
SE VIA ENTUZIASMO POR MATEMATIKO NE VELKOS, VI HAVOS TEMPON POR PLI PROFUNDE STUDI TIUJN TEMOJN PURAJN KAJ FORAJN...
MALE, MIA TEMPO FINIĜAS NUN.
MI BONDEZIRAS AL VI ĜOJPLENAN VIVON, SINJORO WINKLER.
ADIAŬ.
A... ADIAŬ, PROFESORO FIZ.
TAP
TAP



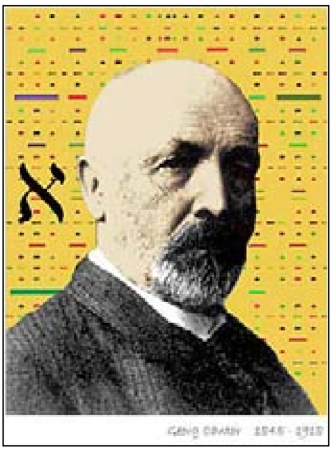


BROOOM
BROOOM
SKRIIIK

La senfina bezono serĉadi Sencon

Enfermita en mortemaj aĵoj
(eĉ la stelplena ĉielo finiĝos)
kial mi deziregas Dion?
(Giuseppe Ungaretti)

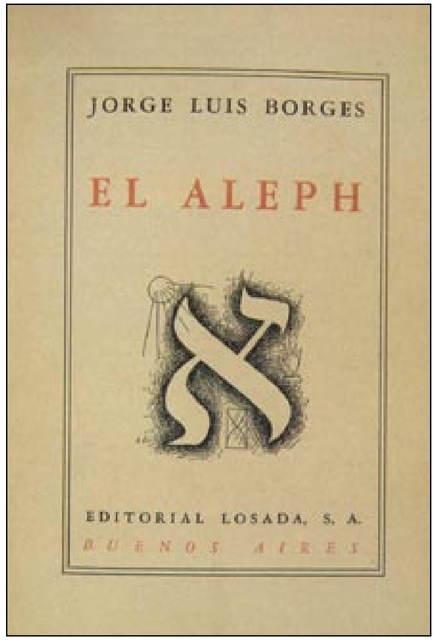
Unu el la multaj, potence sennombraj, antikvaj Tradicioj asertas, ke, inter la "instrumentoj" antaŭantaj la Kreadon, Dio estigis la alfabetajn literojn, kaj per ili Li skribis la Veron, kiun poste Li revidis kaj transigis en la profanan realecon de la aĵaro. Kaj alfabetajn seriojn Li produktis du: la unua el ili estas "abstrakta", instruata en lernejoj (*alef bet ĝimel dalet*...); la dua, konkrete uzata, postvenis dum la konstruado de "tio, kio estas" (*bet reŝ alef ŝin*...). Kial tiel estas, nur Dio povas scii. Estas fakto, ke, inter la eblaj interpretoj, se la mondo baziĝas sur la litero *bet*, la simbola binareco, kiu regas realon (alta-malalta, varma-malvarma, bela-malbela, vera-malvera) kaj el kiu fontas la malstatikeca dinamismo, kiun aludas alegorio de Heraklito pri milito, patrino kaj reĝino de ĉio ajn (fr. B 53), malantaŭ *bet* riveliĝas kaj - samtempe - re-vualiĝas la litero *alef*, simbolo de la Unu, de kiu ĉio devenas kaj en kiu la fino de la tempo estigos la restaŭradon (*tikkun*, dirite en la hebrea, la lingvo uzata en ĉi tiu rakonto), alivorte la reveno al la Vera Senco, al la absoluta "*Alter*" (aliulo), ĉe kiu la binarecoj de nia homa logiko malaperas en "*itinerarium mentis in Deum*" (mensa itinero en Dion), kiu ja redonos la finan kuniĝon de guto kaj maro.



Georg Cantor kaj "lia" *alef*

Ĉi tiu stranga, kurioza rakonto aperas des pli stranga, se oni konsideras, ke - signifoplena ekzemplo pri niaj asertoj - Isaac Newton, akirante eternan famon kiel unu el la patroj de la moderna scienco, traesploris la antikvajn skribojn de la Tradicio, serĉante ĝuste en la litera alkimio, la Sencon de Kreado, instigite de la atavisma konceptado (en nia Okcidento memorindas almenaŭ Pitagoro), laŭ kiu ĉio esprimeblas per nombro, nome per mezuro kaj rilato ("Per tridek du mirindaj Vojoj de saĝeco" komenciĝas "*Sefer Yetzirah*", mistika teksto taksata inter la plej elstaraj, laŭ la Tradicio verko de Adam Qadmon mem). En Dio ĉio eblas, eĉ: ĉio estas. Preter tempo kaj spaco, preter la funkciaj kontraŭmetoj de la Sistemo-Universo. Preter bono kaj malbono, kiel jam dirite. Kaj en la senfina (aŭ, pli ĝuste, nedifina, ŝajne) ebleco pri "noumeno", la Vero, simfonia en sia manifestado, ununura, kiel la sankta valoro de *Alef*, kiu estas samtempe, aliforme korektita, signo de la du en la unu (la centra akso kaj la du polusecoj ĉeflanke), kaj kiu, kunmetita kaj rekalkulita per la geometria arto, kvazaŭ alkemie valoras samtempe, kvantumigita en nombra formo, 1 kaj 26 (samvalora de la neprononcebla Granda Nomo, kaj - inter la "strangaj" koincidoj, kiuj tiom fascinus ian samtempan Newton - nombro de la Universaj dimensioj, laŭ unu el la plej establiĝintaj teorioj).

Nenia logiko, en ĉio tio, evidente. La unika irebla vojo, en mistika nedirebleco, kiu ŝajnus la malo de scienceco tipa de objektiva scio. Eniri tian interpretigan mondon estas, tion dirante laŭ niatempa terminologio, kvantuma salto rilate al konceptado. La infinito, unu kaj unika, enhavas la Ĉion, kun ties ne(di)finitaj eblecoj: kiel la libroj de la "Biblioteko" de Jorge Luis Borges, kiu ne hazarde dediĉis al *Alef* unu el siaj plej famaj rakontoj. Kaj, por utilizi alian, sed ne diversan, interpreton, la kapablestingo de Manas (la logika-formala menso, la mezuranta, la penso, kiu etimologie signifas pesi, mezuri la pezon de la aferoj, kiu estas la maniero tute homa kontakti kaj interpreti la Mondon, kaj sondi Ties Kaŭzoj, inkluzive, kial ne, de la tutunuaj) por estigi la iluminadon de Budaoj, kiu kun suma intuicio (etimologie signifanta "vidi en la plej profundan esencon de Realo") en-havas la Vivon kaj ties disvolviĝon en perfekta, sinergia unueco.



La *Alef*, laŭ la argentina verkisto Borges

Restas demando, la vera demando, kiu de ĉiam estas "*in principio*" (komence): ĉu la Senco ekzistas nur ĉar la homaro bezonas ĝin? Ĉu la infinito ekzistas nur ĉar ĝi ŝajnus kvazaŭ biologie enskribita en la homa naturo? En la homa menso, en kiu realo kaj racio postkuras kaj rilatas inter si reciproke kvazaŭ en dipolo, unuflanke la plej malfacile irebla spekulativado pri infinitoj kaj ilia grandeco, alflanke la plej nekredeblaj dramoj ("strangaj" flavaj steloj sur la jakoj) montras la nelogikecon de la Mondo kaj de la Vivo, kaj de tiu Penso, kiu, materiiĝante en la mistero de la diskreta senlimeco (en kalkulkapablo, pli ol en Chomsky-a parolkapablo) konformigas ambaŭ ilin: nelogikeco, kiu tute ne estas senlogika, sed prezentiĝas kiel kroma evidenteco de la paradokso, en kiu ni vivas, laŭ Kanta filozofio ligitaj ĉe la profundo de niaj radikoj al la materia limigeco, kaj liberaj, pere de niaj frondoj, aspiri al la supera (eĉ nur laŭ Kantora penso) ordosalto (Natura aliquando facit saltus = la naturo, de tempo al tempo, faras saltojn). En dramo, kiu disvolviĝas ĉiumomente, trudate de konscio, pli malpli vigla, ke Dio (t.e. *Alef*, t.e. Infinito) estas "nealirebla", almenaŭ profane aludante la ekziston de la polusecoj de bet.

Davide Astori

Davide Astori instruas Ĝeneralan Lingvistikon ĉe la Universitato de Parma. Rilate al lingvoinstruado, li kunordigis la esperantigon de la kurso pri itala lingvo de Marco Mezzadri, "L'italiano essenziale", Guerra editore, Perugia 2006, kaj redaktis la dulingvan manlibron "Parlo Esperanto", Garzanti, Milano 1996. Kulture li ĉefe interesiĝas pri la Zamenhofa filozofia mondkoncepto kaj la esplorado de kvazaŭ-popolaj trajtoj de la Esperanta Socio.

projekto RoMEo
prezentas

Davide Osenda

Lasta lekcio en Gotingeno

Projektestro
DANIELE BINAGHI

Tradukado
DANIELE BINAGHI
ANTONIO C. CODAZZI
MIRELLA DE MARTINI
FILIPPO ZANONER

Kontrollegado
MARCO CACCHIANI
CRISTINA DE GIORGI
CARLO MINNAJA
MIĤAIL POVORIN
RUSS WILLIAMS

Helpoj
DAVIDE ASTORI
ANDREA PLAZZI
KLOD TREZORJE

Enpaĝigado
DANIELE BINAGHI

Eldonis
PROJEKTO ROMEO

Ultima lezione a Gottinga © 2010 Copyright Davide Osenda, all Rights reserved. Used under License Creative Commons BY-NC-ND 2.5. Por tiu ĉi eldono: © 2010 projekto RoMEo. Ĉiuj rajtoj rezervitaj. Ĉiu bildo aperanta en tiu ĉi libreto estas kopirajto © de sia respektiva posedanto. La prezentado de la aŭtoro je paĝoj 2-3 multe ŝuldas al du intervjuoj publikigitaj en la blogo de Andrea Plazzi: http://andreaplazzi.wordpress.com

Informoj pri la projekto RoMEo je la adreso:
http://www.pecorElettriche.it/

Grava atentigo:

tiu ĉi komikso estas senpage elŝutebla
laŭ PDF-a formo el la retejo
de projekto RoMEo
dank' al afableco de ĝia aŭtoro,
Davide Osenda.
La dosiero prezentas
la unuan parton de la rakonto
Lasta lekcio en Gotingeno,
kiu jam aperis en la itala ĉe 001 Edizioni.

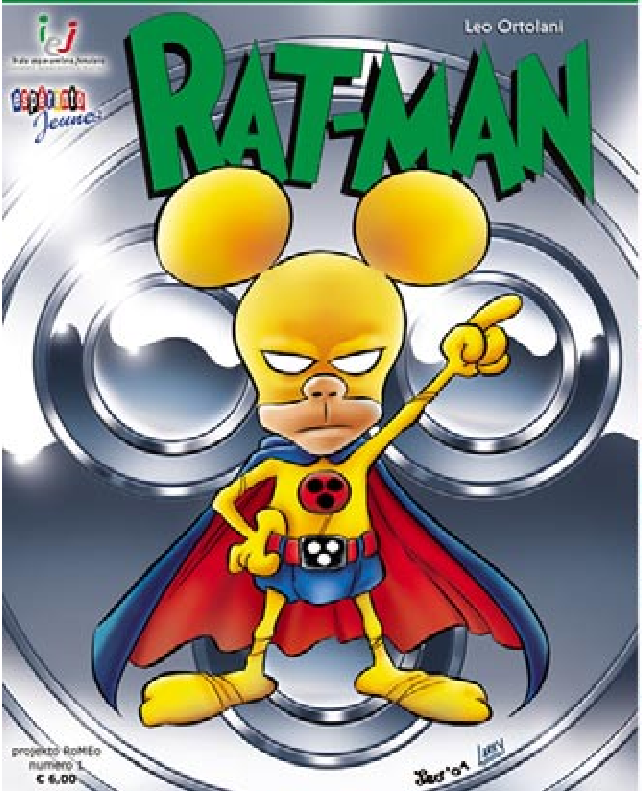
Projekto RoMEo ege ŝatus eldoni
printitan version de tiu ĉi komikso,
sed ĉar temus pri tutkolora speciala libreto
ĝi verŝajne kostus pli multe ol la normalaj
komikslibretoj de projekto RoMEo.

Pro tio, ni bezonus trovi antaŭe
sufiĉe da eblaj aĉetontoj.

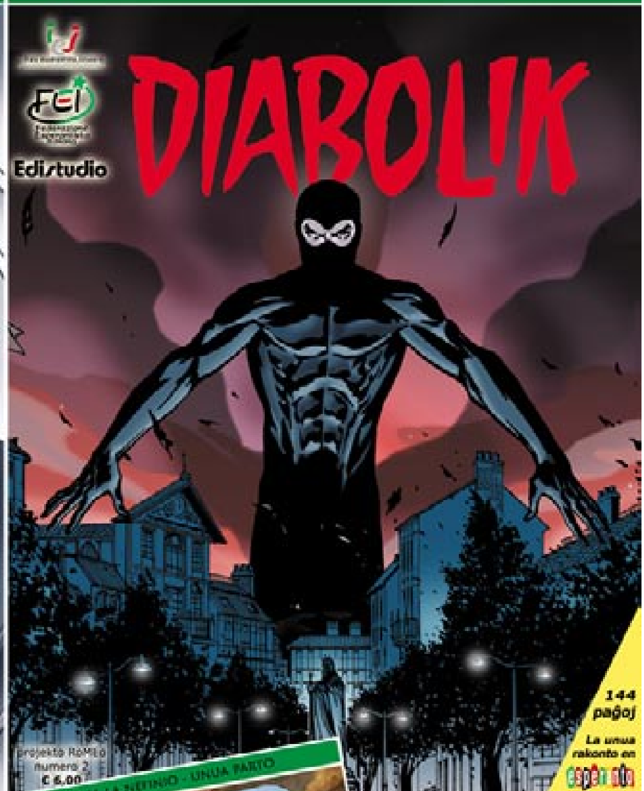
Se vi ŝatis tiun ĉi rakonton,
kaj dezirus subteni ĝian publikiĝon
aĉetante unu aŭ pli ekzemplerojn
printitajn aŭ iel alie, bonvolu tion anonci
ĉe la paĝoj de projekto RoMEo,
kaj specife ĉe http://www.pecorElettriche.it/
Esperanto/RoMEo/Gotingeno.asp

Dankon!

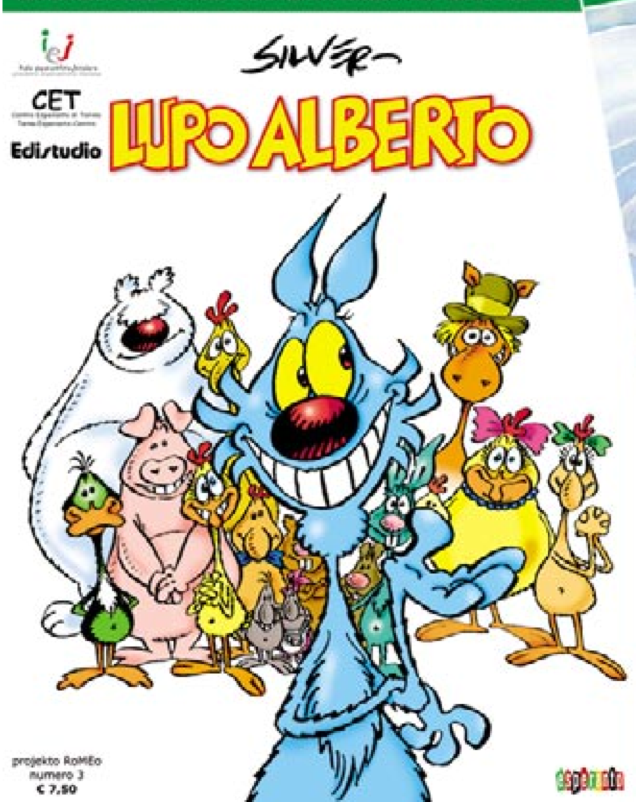
LA RAKONTOJ DE RAT-MAN TRADUKITAJ EN ESPERANTON



LA REĜO DE LA TERORO



LA UNUAJ BILDSTRIOJ KAJ ALIAJ RAKONTOJ EL LA BESTOBIENO



projekto RoMEo

...komiksoj, por ĉiuj...

http://www.pecorElettriche.it/esperanto/RoMEo/

esperanto